1

DIE ABLEITUNG

1.1 AUFGABE: SUMMEN-, POTENZ- UND PRODUKTREGEL

Gesucht werden die Ableitungen der folgenden Funktionen

1. $f(x) = (x-1)(x+1)$
2. $g(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$
3. $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$
4. $u(x) = (x^2+1)e^x$

i) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1)$ $\qquad f'(x) = ?$

1. Lösungsweg

$f(x) = x^2 - x + x - 1 = x^2 - 1 \qquad f'(x) = (x^2-1)' = 2x$

2. Lösungsweg mit Produktregel

$$f'(x) = (x-1)' \cdot (x+1) + (x-1) \cdot (x+1)'$$
$$= 1 \cdot (x+1) + (x-1) \cdot 1 = 2x$$

2.) $g(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

1. Lösungsweg: $g(x) = (x^2-1)\cdot(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$g'(x) = \underline{3x^2 - 4x - 1}$

2. Lösungsweg: $g'(x)$

$$= \underbrace{(x-1)'}_{=1}\cdot(x+1)\cdot(x-2) + (x-1)\cdot\underbrace{(x+1)'}_{=1}\cdot(x-2) + (x-1)\cdot(x+1)\cdot\underbrace{(x-2)'}_{=1}$$

$$= (x+1)\cdot(x-2) + (x-1)\cdot(x-2) + (x-1)\cdot(x+1)$$

$$= x^2 - 2x + x - 2 + x^2 - 2x - x + 2 + x^2 - 1 = \underline{3x^2 - 4x - 1}$$

3.) $$f'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2}\right)'$$

$$= 0 + 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{3}\cdot x^2}{\cancel{3}\cdot 2} + \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}\cdot 3\cdot 2}$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2}$$

1. Lösung :

    - a) $f'(x) = 2x$
    - b) $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$; $g'(x) = 3x^2 - 4x - 1$
    - c) $h'(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$
    - d) $u'(x) = (x+1)^2 e^x$

1.2 AUFGABE: QUOTIENT- UND KETTENREGEL

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$
2. $g(x) = \sqrt{2x^3 + 2x}$
3. $h(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
4. $u(x) = \cos(xe^x) + \ln(\cos x)$
5. $p(x) = \dfrac{\sin(x \ln x)}{\cos(x)}$
6. $q(x) = x^x$ *Tipp:* $x^x = \exp(x \ln x)$

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)' \cdot (x+1) - (x^2-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x+1) - (x^2-1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = 1$$

alternative Berechnung:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = (x-1) \implies f(x)' = (x-1)' = 1.$$

$$g'(x) = \left(\sqrt{2x^3+2x}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2x^3+2x}} \cdot (2x^3+2x)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^3+2x}} \cdot (6x^2+2)$$

$$h'(x) = \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\left(\frac{(x+1)'\cdot(x-1)-(x+1)\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)^3}}$$

$$u'(x) = \left(\cos(xe^x)\right)' + \left(\ln(\cos x)\right)'$$

$$= -\sin(xe^x)\cdot(xe^x)' + \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'$$

$$= -\sin(xe^x)\cdot\left((x)'\cdot e^x + x\cdot(e^x)'\right) + \frac{(-\sin x)}{\cos x}$$

$$= -\sin(xe^x)\cdot(e^x + xe^x) - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$p(x)' = \frac{(\sin(x\ln x))'\cdot\cos(x) - \sin(x\ln x)\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos(x\ln x)\cdot(x\ln x)'\cdot\cos x + \sin(x\ln x)\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos(x\ln x)\cdot(\ln x + 1)\cdot\cos x + \sin(x\ln x)\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$q(x)' = \left(x^x\right)' = \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(x\cdot\ln x)'$$

$$= e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x + 1) = x^x\cdot(\ln x + 1)$$

1. Lösung :
    - a) $f'(x) = \frac{2x}{x+1} - \frac{x^2-1}{(x+1)^2} = 1$
    - b) $g'(x) = \frac{\sqrt{2}\left(3x^2+1\right)}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)x}}$
    - c) $h'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$
    - d) $u'(x) = -(xe^x + e^x)\sin(xe^x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
    - e) $p'(x) = \frac{(\ln(x)+1)\cos(x\ln(x))}{\cos(x)} + \frac{\sin(x\ln(x))\sin(x)}{\cos(x)^2}$
    - f) $q'(x) = x^x(\ln(x) + 1)$

1.3 AUFGABE

Sei $f(x) = x^2 - x$.

- Zeichnen Sie den Graphen der entsprechenden Parabel
- Bestimmen Sie die Gleichung der Sekante, die durch die Punkte $(1, f(1))$ und $(2, f(2))$ läuft und zeichnen Sie den Graphen.
- Bestimmen Sie Gleichung der Tangente an der Stelle $x_0 = 2$ und zeichnen Sie ihren Graphen.

1. Lösung :

   - Sekantengleichung:

$$y = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}(x - 1) + f(1) = 2(x - 1)$$

   - $f'(x) = 2x - 1$, die Tangentengleichung lautet:

$$f'(2)(x - 2) + f(2) = 3(x - 2) + 2 = 3x - 4$$