Ingenieurmathematik II

Vorlesungsaufgaben

Petra Wenisch,
Pasquale Zito

Fachhochschule Potsdam
University of Applied Sciences

Fachbereich Bauingenieurwesen
Sommersemester 2021

[18. April 2022 at 19:09 – version 0.1]

INHALTSVERZEICHNIS

Teil I

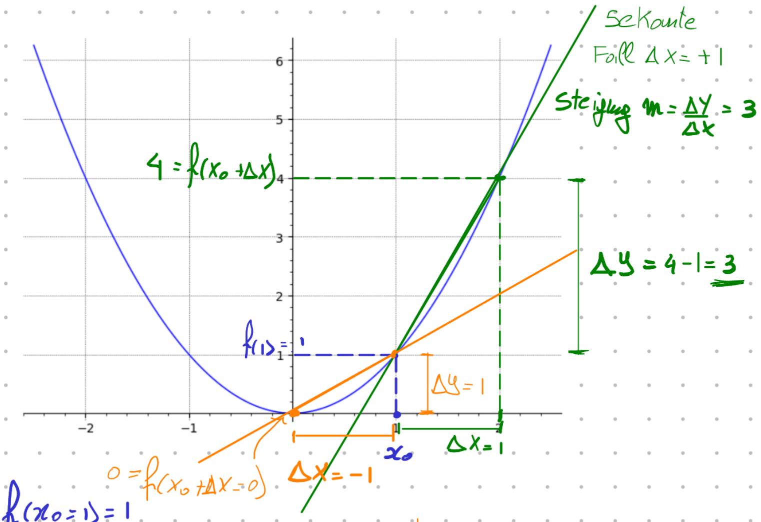
DIFFERENTIALRECHNUNG

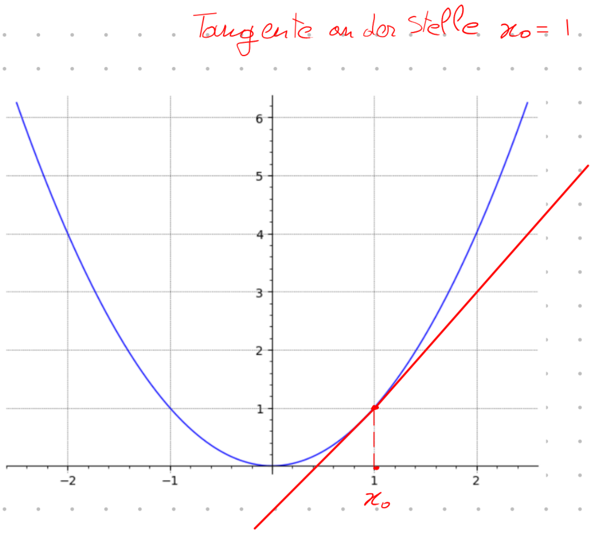
DIE ABLEITUNG

1.1 AUFGABE

Gegeben seien die Funktion $f(x) = x^2$ und die Stelle $x_0 = 1$.

- Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten die durch die zwei Puntke $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ läuft für $\Delta x = 1$ bzw. $\Delta x = -1$
- Geben Sie den Ausdruck für die Steigung der Sekante für beliebiges Δx.
- Geben Sie die Gleichung der Tangente a.d.S. x_0.





Steigung der Sekante:

$$m = \frac{\Delta y}{|\Delta x|} = \frac{1}{1} = \underline{1}$$

$$m = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(0) - f(1)}{(-1)} = \frac{0 - 1}{(-1)} = \underline{\underline{1}}$$

Steigung der Tangente a.d.S. $x_0 = 1$ ist gleich den Wert der Ableitung von $f(x)$ a.d.S. $x_0 = 1$

$\underline{f(x) = x^2}$ $\quad$ $\underline{f'(x) = 2x}$

Wichtige Begriffe:
- Tangente
- Sekante
- Ableitung

Ausdruck der Steigung der Sekante:

$$m = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{\cancel{1} + 2\Delta x + \Delta x^2 \cancel{-1}}{\Delta x}$$

$$= 2 + \Delta x$$

Steigung $m = f'(x_0 = 1) = 2 \cdot 1 = 2$

Gleichung der Tangente mit Punkt-Steigung Form

$$y = m \cdot (x - x_0) + \underbrace{f(x_0)}_{y_0}$$

Gleichung der Tangente a.d.S. $x_0 = 1$

$$y = 2 \cdot (x - 1) + 1$$

$$y = 2x - 1$$

Zur Notation

Äquivalente Notationen $\frac{df}{dx}$ $\frac{d}{dx}f(x)$ $f'(x)$

1.2 AUFGABE: PRODUKTREGEL

Gesucht werden die Ableitungen der folgenden Funktionen

- $f(x) = 5x^3 \sin x$
- $g(x) = e^x \ln x$
- $h(x) = x \sin x \cos x$

Einige grundlegende Ableitungsregeln

•) Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ z.B. $(x^4)' = 4 \cdot x^3$

•) Exp-regel $(\exp(x))' = \exp(x)$

•) cos sin $(\cos(x))' = -\sin(x)$; $(\sin(x))' = \cos(x)$

•) ln $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

•) Summenregel, Faktorregel

•) Produktregel: Annahme $f(x) = p(x) \cdot q(x)$

$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$

$f(x) = 5x^3 \cdot \sin(x)$

$f'(x) = (5x^3)' \cdot \sin(x) + 5x^3 \cdot (\sin(x))'$

$= 5 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) + 5x^3 \cdot \cos(x) = 5x^2 (3 + x \cdot \cos(x))$

$$g(x) = e^x \cdot \ln(x)$$

$$g'(x) = (e^x)' \cdot \ln(x) + e^x \cdot (\ln(x))'$$

$$= e^x \cdot \ln(x) + e^x \cdot \frac{1}{x} = e^x \cdot \left(\ln(x) + \frac{1}{x}\right)$$

$$h(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Produktregel 1. Mal

$$h'(x) = (x \cdot \sin(x))' \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (\cos(x))'$$

Produktregel 2. Mal

$$= \left((x)' \cdot \sin(x) + x \cdot (\sin(x))'\right) \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$= \left(1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\right) \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)^2$$

$$= \underline{\sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \cos^2(x) - x \cdot \sin(x)^2} \; \checkmark$$

alternative Berechnung

$$h(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Produktregel 1. Mal

$$h'(x) = (x)' \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot (\sin(x) \cdot \cos(x))'$$

Produktregel 2. Mal

$$= 1 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \left((\sin(x))' \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (\cos(x))'\right)$$

$$= \underline{\sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \left(\cos(x)^2 - \sin(x)^2\right)} \; \checkmark$$

allgemeine Produktregel (Produkt von 3 Funkt.)

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) \cdot u(x)$$

$$f'(x) = p'(x) \cdot q(x) \cdot u(x) + p(x) \cdot q'(x) \cdot u(x) + p(x) \cdot q(x) \cdot u'(x)$$

$$h(x) = x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$h'(x) = (x)' \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot (\sin(x))' \cdot \cos(x) + x \cdot \sin(x) \cdot (\cos(x))'$$

$$= \underline{\sin(x) \cdot \cos(x) + x \cdot \cos(x)^2 - x \cdot \sin(x)^2} \; \checkmark$$

1.3 AUFGABE: QUOTIENTREGEL

Gesucht werden die Ableitungen der folgenden Funktionen

- $f(x) = \frac{x^3+3x}{e^x}$
- $g(x) = \frac{\ln x}{e^x}$
- $h(x) = \frac{x^2}{x \ln x}$
- $p(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

Quotientregel

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x) \cdot q(x) - p(x) \cdot q'(x)}{q(x)^2}$$

äquivalent $= \frac{p'(x)}{q(x)} - \frac{p(x) \cdot q'(x)}{q(x)^2}$

•) $f'(x) = \left(\frac{x^3 + 3x}{e^x}\right)'$

$p(x) = x^3+3x$; $q(x) = e^x$

$$= \frac{(x^3+3x)' \cdot e^x - (x^3+3x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2+3) \cdot \cancel{e^x} - (x^3+3x) \cdot \cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{-x^3+3x^2-3x+3}{e^x}$$

•) $g'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{e^x}\right)' = \frac{(\ln(x))' \cdot e^x - \ln(x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$

$= \frac{\frac{1}{x} \cdot \cancel{e^x} - \ln(x) \cdot \cancel{e^x}}{e^{\cancel{2}x}} = \frac{\frac{1}{x} - \ln(x)}{e^x}$

$= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \cdot \ln(x)$

•) $h'(x) = \left(\frac{x^2}{x \cdot \ln(x)}\right)'$

$= \frac{(x^2)' \cdot x \cdot \ln(x) - x^2 \cdot (x \cdot \ln(x))'}{(x \cdot \ln(x))^2}$

Produktregel

$= \frac{2x \cdot x \cdot \ln(x) - x^2 \cdot ((x)' \cdot \ln(x) + x \cdot (\ln(x))')}{(x \cdot \ln(x))^2}$

$= \frac{2\cancel{x^2} \cdot \ln(x) - \cancel{x^2} \cdot (\ln(x) + x \cdot \frac{1}{x})}{\cancel{x^2} \cdot \ln(x)^2} = \frac{2 \cdot \ln(x) - \ln(x) - 1}{\ln(x)^2} = \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

eigentlich $h(x) = \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x} \cdot \ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)}$

alternative Rechnung: $h'(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x)' \cdot \ln(x) - x \cdot (\ln(x))'}{\ln(x)^2} = \frac{\ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln(x)^2}$

$= \frac{\ln(x) - 1}{\ln(x)^2}$

•) $\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\sin(x)' \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (\cos(x))'}{\cos(x)^2}$

$= \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos(x)^2}$

$= \frac{\overbrace{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}^{= 1}}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$

Anmerkung: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow (\tan(x))' = \frac{1}{\cos(x)^2}$

1.4 AUFGABE: KETTENREGEL

Gesucht werden die Ableitungen der folgenden Funktionen

- $u(x) = \exp(x^2 + 2x - 1)$
- $f(x) = \sin(x^2 + 2x - 1)$
- $g(x) = \ln(x^3 + x)$
- $h(x) = \sin(\cos(x))$
- $p(x) = \sin(\cos(\ln(x)))$

Kettenregel $\big(f(g(x)) \big)' = f'(g(x))\, g'(x)$

Typischer Fehler: $\cancel{f'(x) \cdot g'(x)}$ Falsch!

a) $u'(x) = \left(\exp(x^2 + 2x - 1) \right)'$

$= \exp(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2)$

$= \underline{\exp(x^2 + 2x - 1) \cdot (2x + 2)}$

$f(x) = \exp(x) = e^x$
$g(x) = x^2 + 2x - 1$

$f'(x) = e^x$
$g'(x) = 2x + 2$

$\sin(x)' = \cos(x)$

$(x^2+2x-1)' = 2x+2$

•) $\left(\sin(x^2+2x-1)\right)' =$

$= \cos(x^2+2x-1) \cdot (2x+2)$

Typischer Fehler: $\cos(x) \cdot \cancel{(2x+2)}$ Falsch!

$\ln(x)' = \frac{1}{x}$

$(x^3+x)' = 3x^2+1$

•) $\left(\ln(x^3+x)\right)' = \frac{1}{(x^3+x)} \cdot (3x^2+1)$

$= \frac{3x^2+1}{x^3+x}$

•) $\left(\sin(\cos(x))\right)' = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x))$

$= -\cos(\cos(x)) \cdot \sin(x)$

$f(x) = \sin(x)$

$\vdots$

•) $p(x) = \sin(\cos(\ln(x)))$

$$p'(x) = \big(\sin(\cos(\ln(x)))\big)' =$$

$$= \cos(\cos(\ln(x))) \cdot \big(\cos(\ln(x))\big)'$$

$$= \cos(\cos(\ln(x))) \cdot \sin(\ln(x)) \cdot (\ln(x))'$$

$$= \cos(\cos(\ln(x))) \cdot \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \cos(\cos(\ln(x))) \cdot \sin(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x}$$

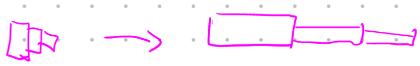
$$p(x) = f(g(h(x)))$$

$f(x) = \sin(x)$ $\quad f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(x)$ $\quad g'(x) = -\sin(x)$

$h(x) = \ln(x)$ $\quad h'(x) = \frac{1}{x}$

$$p'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Teleskopische Formel 

Anmerkung: Quotientregel als Kettenregel ... $\quad P(x) = x^3+3x$

$q(x) = \frac{1}{x}$ $\quad q'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$q(e^x) = \frac{1}{(e^x)}$

$$f(x) = \frac{x^3+3x}{e^x} = \overset{P(x)}{(x^3+3x)} \cdot \overset{q(e^x)}{\frac{1}{(e^x)}}$$

$f'(x) = ?$

$$\big(P(x) \cdot q(e^x)\big)'$$

Produktregel $\quad P'(x) \cdot q(e^x) + P(x) \cdot \big(q(e^x)\big)'$ ← Kettenregel

$$= (3x^2+3) \cdot \frac{1}{e^x} + (x^3+3x) \cdot q'(e^x) \cdot (e^x)'$$

$$= (3x^2+3) \cdot \frac{1}{e^x} + (x^3+3x) \cdot -\frac{1}{(e^x)^2} \cdot e^x$$

$$= \frac{1}{e^x} \cdot (3x^2+3 - x^3 - 3x)$$

gleiche Ergebnis als vorher