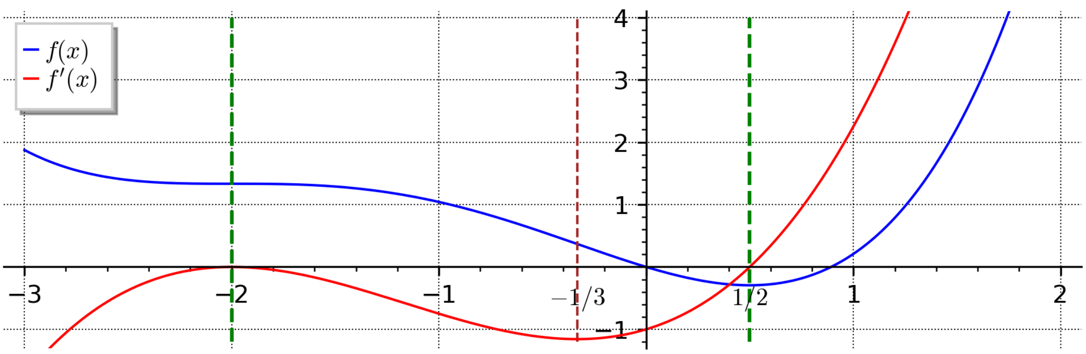
2

ABLEITUNGEN - GRAPHISCHE INTERPRETATION

2.1 AUFGABE

Das folgende Bild zeigt den Funktionsgraphen einer Polynomialfunktion. Bestimmen Sie:

- die Stellen wo $f'(x) = 0$
- die Bereichen wo $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo $f(x)$ steigend bzw. fallend ist
- die Stellen wo $f''(x) = 0$
- die Bereichen wo $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo die erste Ableitung $f'(x)$ steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima) von $f'(x)$.
- Skizzieren Sie den Graphen von $f'(x)$



Die Tangente ist horizontal an der Stellen $x = -2$ und $x = \frac{1}{2}$
es folgt, $f'(x) = 0$ für $x = -2$ und $x = \frac{1}{2}$

$f'(x) > 0$ für x im Bereich $]\frac{1}{2}, \infty[$

$f'(x) < 0$ für x im Bereich $]-\infty, -2[\cup]-2, \frac{1}{2}[$

$f(x)$ ist monoton fallend auf den Bereich $]-\infty, \frac{1}{2}]$

$f(x)$ ist monoton steigend auf den Bereich $[\frac{1}{2}, \infty[$

Der Übergang konvek -> konkav findet an der Stelle $x = -2$ statt,
es folgt $f''(-2) = 0$.

Der Übergang Konkav -> konvex findet an der Stelle $x = -\frac{1}{3}$
es folgt $f''(-\frac{1}{3}) = 0$.

$f(x)$ ist Konvex auf dem Bereich $]-\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, \infty[$
es folgt: $f'(x)$ ist steigend auf dem Bereich $]-\infty, -2] \cup [-\frac{1}{2}, \infty[$
es folgt: $f''(x) > 0$ auf dem Bereich $]-\infty, -2[\cup]-\frac{1}{2}, \infty[$

$f(x)$ ist Konkav auf dem Bereich $[-2, -\frac{1}{3}]$
es folgt: $f'(x)$ ist fallend auf dem Bereich $[-2, -\frac{1}{3}]$
es folgt: $f''(x) < 0$ auf dem Bereich $]-2, -\frac{1}{3}[$

$f'(x)$ hat ein lokales Minimum bei $x = -\frac{1}{3}$

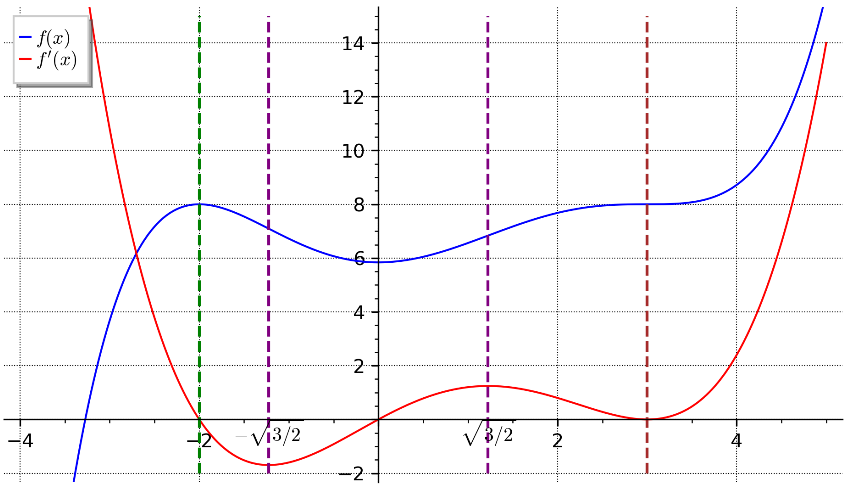
$f'(x)$ hat ein lokales Maximum bei $x = -2$

(nicht gefragt) $f(x)$ hat einen Sattelpunkt bei $x = -2$

2.2 AUFGABE

Das folgende Bild zeigt den Funktionsgraphen einer Polynomialfunktion. Bestimmen Sie:

- die Stellen wo $f'(x) = 0$
- die Bereichen wo $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo $f(x)$ steigend bzw. fallend ist
- die Stellen wo $f''(x) = 0$
- die Bereichen wo $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo die erste Ableitung $f'(x)$ steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima) von $f'(x)$.
- Skizzieren Sie den Graphen von $f'(x)$



1. Lösung
   - $f'(x) = 0$ für $x \in \{-2,\ 0,\ 3\}$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty, -2[\cup]0, 3[\cup]3, \infty[$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]-2, 0[$

- $f(x)$ steigend für $x \in]-\infty, -2] \ \cup \ [0, \infty[$
- $f(x)$ fallend für $x \in [-2, 0]$
- $f''(x) = 0$ für $x \in \{-\sqrt{3/2},\ \sqrt{3/2},\ 3\}$
- $f''(x) > 0$ für $x \in]-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}[\cup]3, \infty[$
- $f''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, -\sqrt{3/2}[\cup]\sqrt{3/2}, 3[$
- $f'(x)$ steigend für $x \in [-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}] \ \cup \ [3, \infty[$
- $f'(x)$ fallend für $x \in]-\infty, -\sqrt{3/2}] \ \cup \ [\sqrt{3/2}, 3]$
- $f'(x)$ hat ein lokales Minimum bei $x = -\sqrt{3/2}$
- $f'(x)$ hat ein lokales Maximum bei $x = \sqrt{3/2}$
- $f'(x)$ hat ein lokales Minimum bei $x = 3$

Zusatzlich (nicht explizit gefragt):

- $f(x)$ hat einen Sattelpunkt bei $x = 3$

2.3 AUFGABE

Für die Funktion $-\frac{x^3}{x+1}$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte, ob sie Maxima bzw. Minima sind
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- bestimmen Sie Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen

Nullstellen von $f(x)$: $x_0 = 0$

Definitionsbereich: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Polstelle für $x = -1$.

$$f'(x) = -\frac{(2x+3)\,x^2}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ für $x_0 = 0$ (doppelte NST)

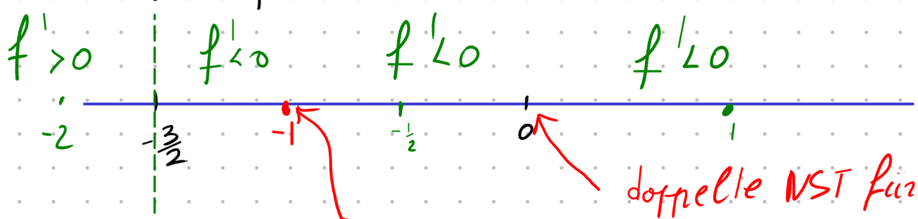
$x_1 = -\frac{3}{2}$

Probewerte $f'(1) = -\frac{5}{4} < 0$

$f'(-0{,}5) = -\frac{2\cdot(0{,}5)^2}{(1{,}5)^2} < 0$

$f'(-2) = -\frac{(-1)}{4} > 0$

Vorzeichen von $f'(x)$:



doppelte NST für $f'(x)$
=> kein Vorzeichenwechsel

Grad 2 im Nenner
=> kein Vorzeichenwechsel

Es folgt: $f(x)$ ist monoton steigend im Bereich $]-\infty, -\frac{3}{2}]$

monoton fallend im Bereich $[-\frac{3}{2}, -1[$ und $]-1, \infty[$

An der Stelle $x=-1$
$f(x)$ und $f'(x)$ nicht definiert!

Es folgt: $(-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}))$ ist ein lokales Maximum

$(0, f(0))$ ist ein Sattelpunkt.

alternative Begründung:

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3x+3)x}{(x+1)^3}$$

$f(-\frac{3}{2})'' < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum $x = -\frac{3}{2}$

$$f''(0) = 0$$

$f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$ $\qquad f'''(0) = -6 \neq 0$

$=$ Sattelpunkt

Krümmungsverhalten

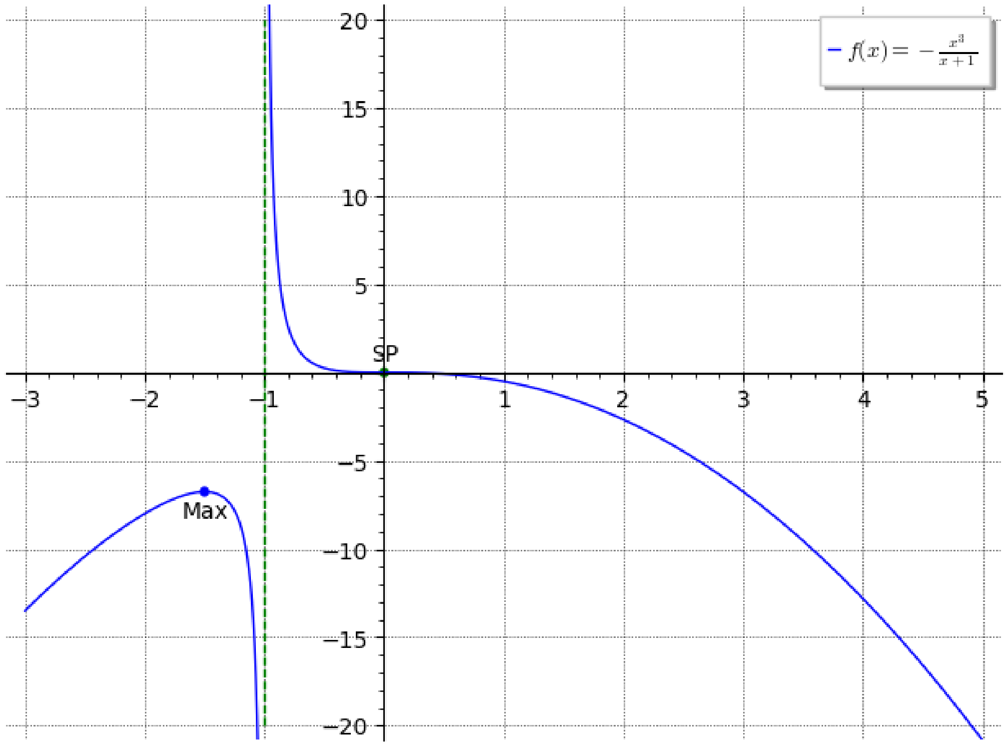
$f''(x) = -\frac{2(x^2+3x+3)x}{(x+1)^3} = 0$ für $x = 0$, $-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3}$ $<0!$

$x=0$ ist die einzige NST für $f''(x)$,
Sattelpunkt $(0, f(0)) = (0, 0)$.
$f'''(0) = -6 \Rightarrow$ Übergang konvex $\to$ konkav

$f''(x) > 0$ auf dem Bereich $]-1, 0[$
es folgt: $f(x)$ ist konvex auf dem Bereich $]-1, 0]$
$f''(x) < 0$ auf dem Bereich $]-\infty, -1[\cup]0, \infty[$
es folgt: $f(x)$ ist konkav auf dem Bereich $]-\infty, -1[\cup [0, \infty[$

($f(x)$ ist nicht definiert an der Stelle 1

1. Graph



2.4 AUFGABE

Für die Funktion $f(x) = x^2 e^{-x}$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte, ob sie Maxima bzw. Minima sind
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- bestimmen Sie Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen

NST von $f(x)$ für $x=0$

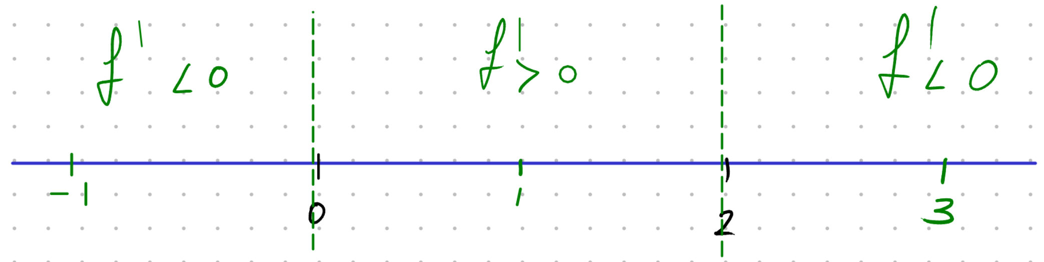
$f'(x) = -(x-2)\,x\,e^{-x}$

$f'(x)=0$ für $x_1 = 0$
$x_2 = 2$

$f''(x) = +(x^2-4x+2)\,e^{-x}$

$f''(0) = +2 > 0$ $\quad (0, f(0)) = (0,0)$ lok. Min

$f''(2) = -2\,e^{-2} < 0$ $\quad (2, f(2)) = (2, +4e^{-2})$ lok. Max



Probewerte

$f'(-1) = -3e < 0$

$f'(1) = +e^{-1} > 0$

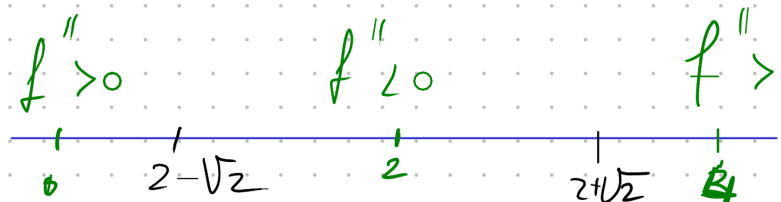
$f'(3) = -3e^{-3} < 0$

$f(x)$ ist monoton fallend auf dem Bereich $]-\infty, 0]$ und $[2, \infty[$

$f(x)$ ist monoton steigend auf dem Bereich $[0, 2]$

$$f''(x) = +(x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

$f''(x) = 0$ für $x = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2+\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$



Probe: $f''(2) = -2e^{-2} < 0$

$f(4) = +2e^{-4} > 0$

$f(0) = +2 > 0$

$f(x)$ Konvex auf dem Bereich $]-\infty, 2-\sqrt{2}]$ und $[2+\sqrt{2}, \infty[$

Konkav auf dem Bereich $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$

WP Konkav -> Konvex an der Stelle $(2+\sqrt{2}, f(2+\sqrt{2}))$

WP Konvex -> Konkav an der Stelle $(2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2}))$

1. Lösung
    - $f'(x) = -(x-2)xe^{(-x)}$
    - $f''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)e^{(-x)}$
    - $f'''(x) = -\left(x^2 - 6x + 6\right)e^{(-x)}$
    - Nullstellen von $f(x) = \{x_0 = 0\}$ (doppelte)
    - Nullstellen von $f'(x) = \{x_0 = 0; x_1 = 2\}$
    - $f'(x) > 0$ für $x \in]0, 2[$
    - $f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty, 0[\cup]2, \infty[$
    - Es folgt:
        - $(x_0, f(x_0))$ ist ein lokales Minimum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_0 = 0$ $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_0) > 0$.
        - $(x_1, f(x_1))$ ist ein lokales Maximum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_1 = 2$ $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_1) < 0$.
        - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in [0, 2]$
        - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$
    - Nullstellen von $f''(x)$: $\{x_2 = 2 + \sqrt{2}; x_3 = 2 - \sqrt{2}\}$
    - $f''(x) > 0$ für $x \in]-\infty, x_3[\cup]x_2, \infty[$
    - $f''(x) < 0$ für $x \in]x_3, x_2[$
    - Es folgt:
        - $f(x)$ ist konvex für $x \in]-\infty, x_3] \cup [x_2, \infty]$
        - $f(x)$ ist konkav für $x \in [x_3, x_2]$
        - $(x_3, f'(x_3))$ ist ein lokales Maximum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_3) < 0$. Damit ist $(x_3, f(x_3))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f(x)$.

   - $(x_2, f'(x_2))$ ist ein lokales Minimum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_2) > 0$. Damit ist $(x_2, f(x_2))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f(x)$.
- Nullstellen von $f'''(x)$: $\{x_4 = 3 + \sqrt{3}; x_5 = 3 - \sqrt{3}\}$
- $f'''(x) > 0$ für $x \in]x_5, x_4[$
- $f'''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, x_5[\cup]x_4, \infty[$
- Es folgt:
   - $(x_4, f''(x_4))$ ist ein lokales Maximum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_4 $f'''(x) > 0$ bzw. $f'''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_4) < 0$. Damit ist $(x_4, f(x_4))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f'(x)$.
   - $(x_5, f''(x_5))$ ist ein lokales Minimum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_5 $f'''(x) < 0$ bzw. $f'''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_5) > 0$. Damit ist $(x_5, f(x_5))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f'(x)$.

2. Graph