2

ABLEITUNGEN - GRAPHISCHE INTERPRETATION

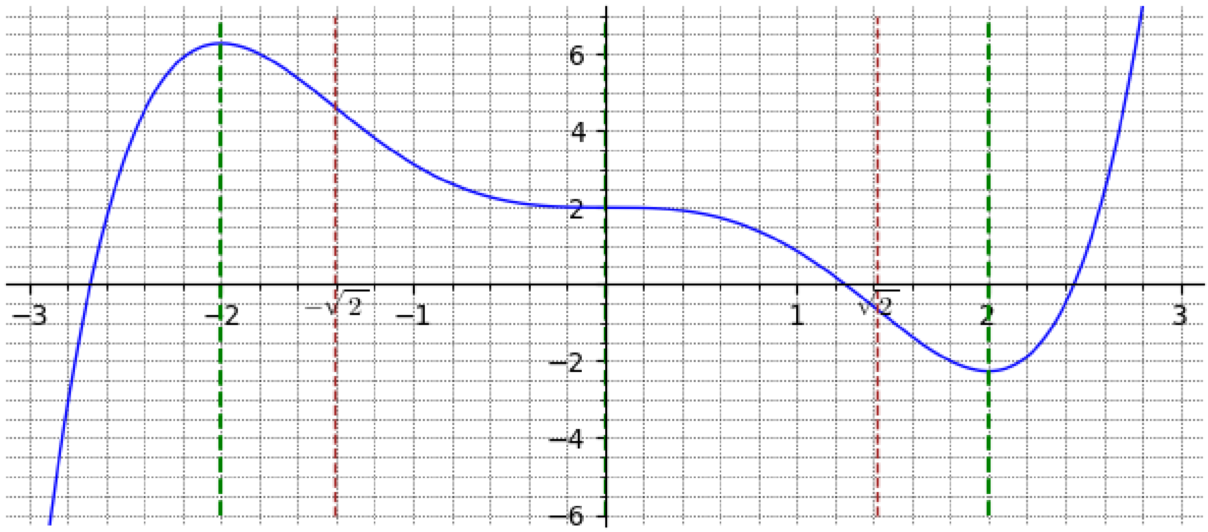
Themen:

- Monotonie und Krümmung einer Kurve *[Pa1] §IV.3.3.1-3*
- Extremwerte *[Pa1] §IV.3.4.1*, *[Şa] §3.13*
- Wendepunkte, Sattelpunkte *[Pa1] §IV.3.4.2-3*

2.1 AUFGABE: ERSTE ABLEITUNG UND MONOTONIE

Das folgende Bild zeigt den Funktionsgraphen einer Polynomialfunktion. Bestimmen Sie:

- die Stellen wo $f'(x) = 0$
- die Stellen wo $f''(x) = 0$
- den Bereich wo $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist
- den Bereich wo $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist



$f(x)$ monoton fallend auf dem Bereich $[-2, 2]$ (d.h. für $-2 \le x \le 2$)
Es folgt: $f'(x) < 0$ auf den Bereich (d.h. für $-2 < x < 2$)

•) $f(x)$ konkav auf den Bereichen $]-\infty, -\sqrt{2}]$ und $[0, \sqrt{2}]$ (d.h. für $x \le -\sqrt{2}$ und $0 \le x \le \sqrt{2}$)
Es folgt: $f''(x) < 0$ auf den Bereichen $]-\infty, -\sqrt{2}[$ und $]0, \sqrt{2}[$
(d.h. für $x < -\sqrt{2}$ und $0 < x < \sqrt{2}$)

$f(x)$ konvex auf den Bereichen
$[-\sqrt{2}, 0]$ und $[\sqrt{2}, \infty[$ (d.h. für $-\sqrt{2} \le x \le 0$ und $x \ge \sqrt{2}$)
Es folgt: $f''(x) > 0$ auf den Bereichen
$]-\sqrt{2}, 0[$ und $]\sqrt{2}, \infty[$ (d.h. für $-\sqrt{2} < x < 0$ und $x > \sqrt{2}$)

1. Lösung

- $f'(x) = 0$ für $x \in \{-2,\ 0,\ 2\}$
- $f''(x) = 0$ für $x \in \{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\}$
- $f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$; $f'(x) < 0$ für $x \in]-2, 0[\cup]0, 2[$
- $f''(x) > 0$ für $x \in]-\sqrt{2}, 0[\cup]\sqrt{2}, \infty[$; $f''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]0, \sqrt{2}[$

2.2 AUFGABE: MONOTONIE UND EXTREMWERTE

Für die Funktion $f(x) = (x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$ bestimmen Sie:

- Nullstellen
- Stellen wo die Tangente horizontal ist
- Bereiche wo die Funktion Steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima)

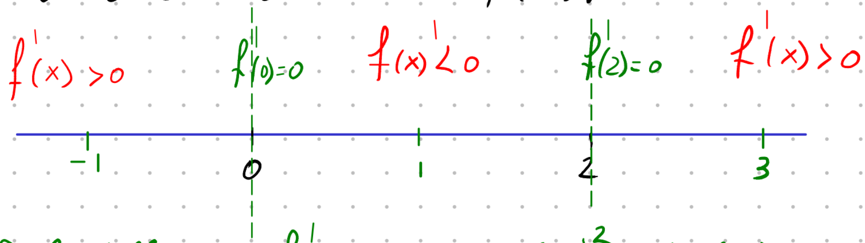
- $f(x) = 0$ für $x = 2$ (doppelte NST) und $x = -1$
- $f'(x) = 3x^2 - 6x$

  $f'(x) = 0 \iff 3x \cdot (x-2) = 0$

  NST von $f'(x)$ für $x = 0$ und $x = 2$

  Es folgt: die Tangente ist horizontal für $x = 0$ und $x = 2$

- Monotonieverhalten von $f(x)$:



Probestellen: $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9 > 0$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 < 0$

$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 > 0$

$f'(x)$ ist positiv für $x < 0$ und $x > 2$

$f'(x)$ ist negativ für $0 < x < 2$

es folgt: $f(x)$ ist monoton steigend für $x \leq 0$ und $x \geq 2$

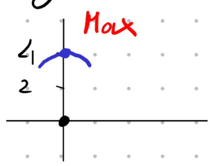
$f(x)$ ist monoton fallend für $0 \leq x \leq 2$

- Lokale Extremwerte:

lokales Maximum bei $x=0$ (mit $f(0)=4$)

Begründung: $f'(0)=0$, links von $x=0$ ist $f(x)$ steigend, rechts von $x=0$ ist $f(x)$ fallend

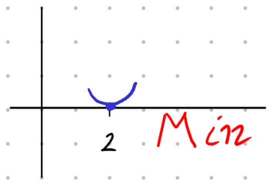
d.h.:



lokales Minimum bei $x=2$ (mit $f(2)=0$)

Begründung: $f'(2)=0$, links von $x=2$ ist $f(x)$ fallend, rechts von $x=2$ ist $f(x)$ steigend

d.h.:



alternative Begründung:

$f'(x)=0$ für $x=0$ und $x=2$

$f''(x) = 6x - 6$ $\qquad f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow (0, f(0)=4)$ lokales Max

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow (2, f(2)=0)$ lokales Min

2.3 AUFGABE: LINKS- UND RECHTSKRÜMMUNG

Für die Funktion $f(x) = (x-2)^2(x+1) = x^3 - 3x^2 + 4$ bestimmen Sie:

- Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte

- $f''(x) = 6x - 6$ $\quad f''(x) = 0$ für $x = 1$

$f''(x) < 0$ $\quad f''(1) = 0$ $\quad f''(x) > 0$

0 $\quad$ 1 $\quad$ 2

Probestellen $\quad f''(2) = 6 > 0$

$f''(0) = -6 < 0$

$f''(x)$ negativ für $x > 1$

" positv " $x < 1$

Es folgt: $f(x)$ linkskrumm (Konvex) für $x \geq 1$

$f(x)$ rechtskrumm (konkav) für $x \leq 1$

- Wendepunkt bei $x = 1$, Konkav → Konvex Übergang (mit $f(1) = 2$)

Alternative Begründung

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$ für $x = 1$

$f'''(x) = +6$

$f'''(1) = +6 > 0$

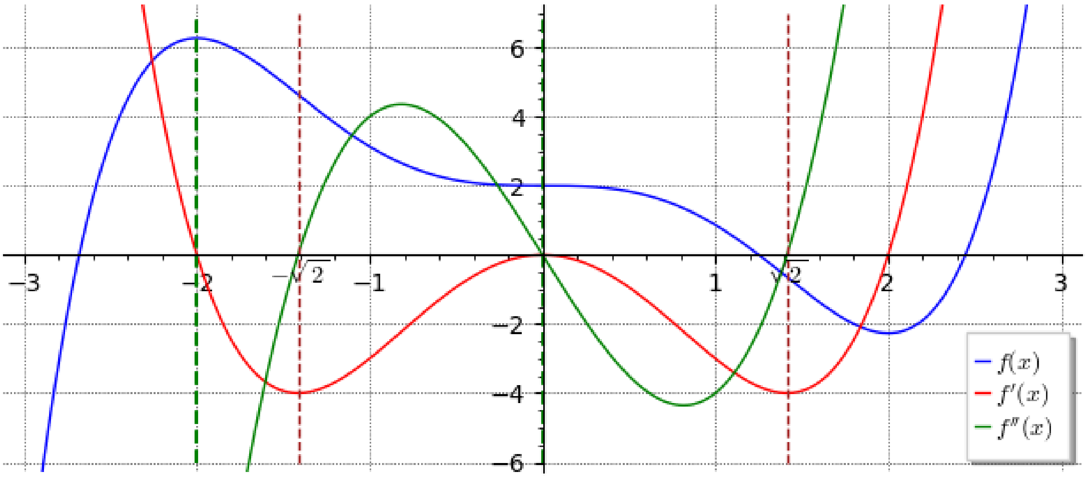
$=$ Wendepunkt $(1, f(1) = 2)$

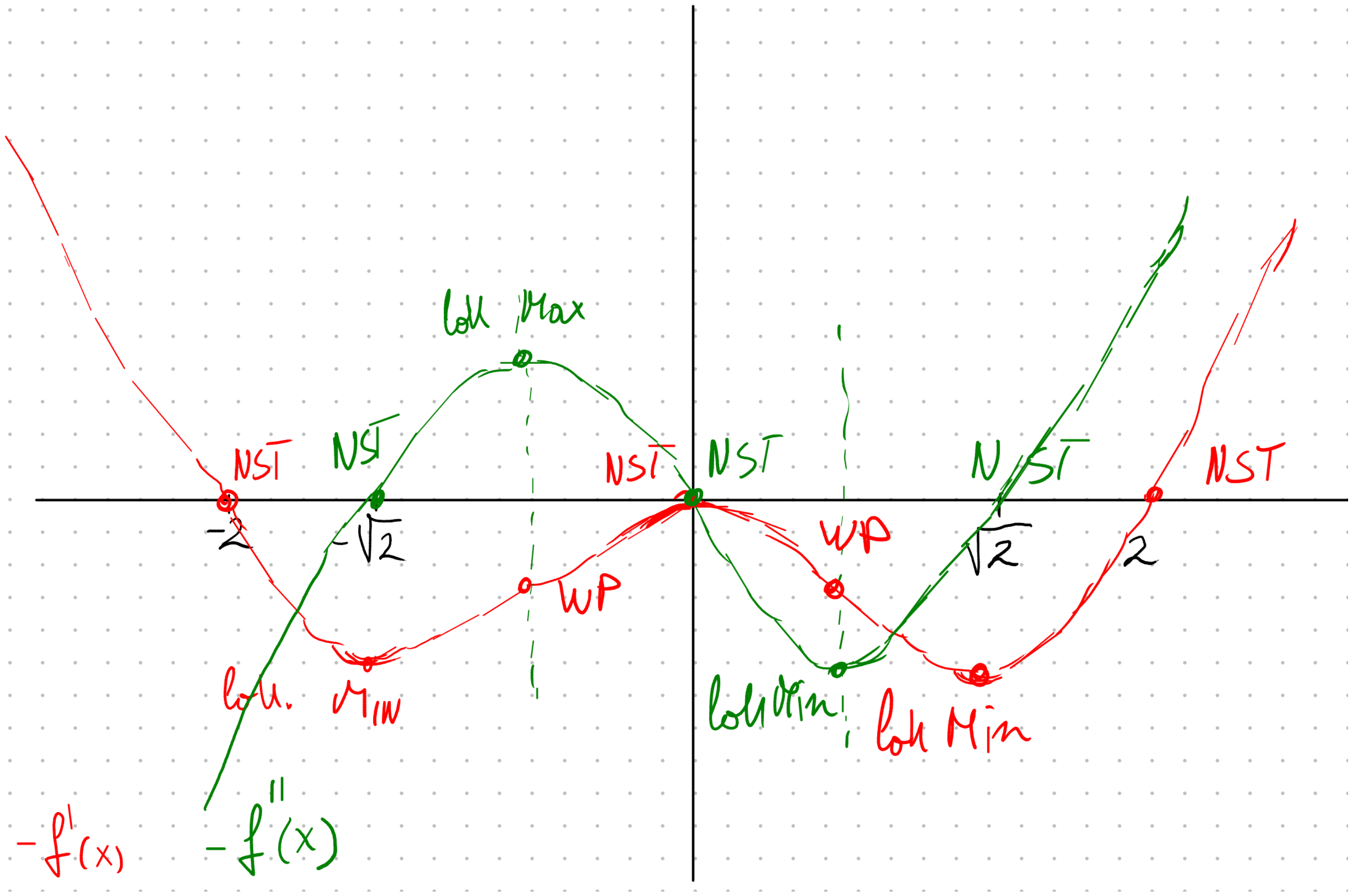
mit konkav $\to$ konvex Übergang, da $f'''(1) > 0$.

Es folgt, dass $f(x)$ soll konkav für $x \leq 1$ sein und konvex für $x \geq 1$ sein.

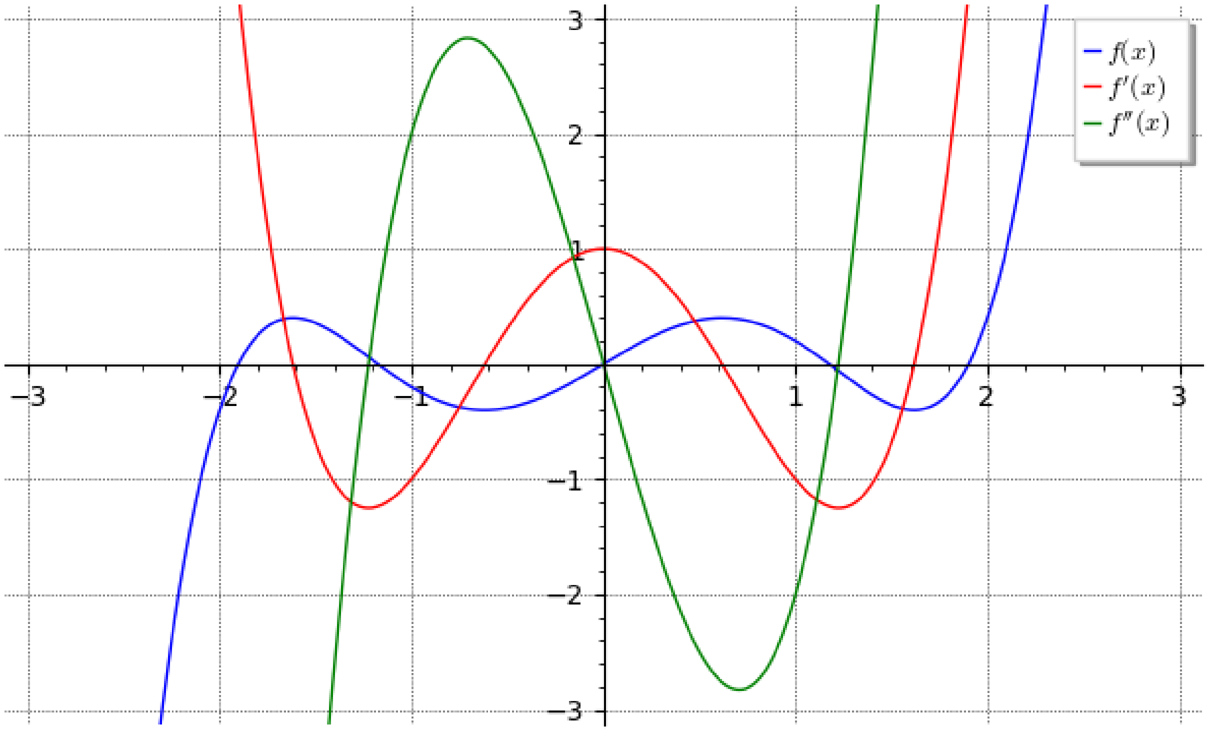
2.4 AUFGABE - QUALITATIVES ABLEITEN

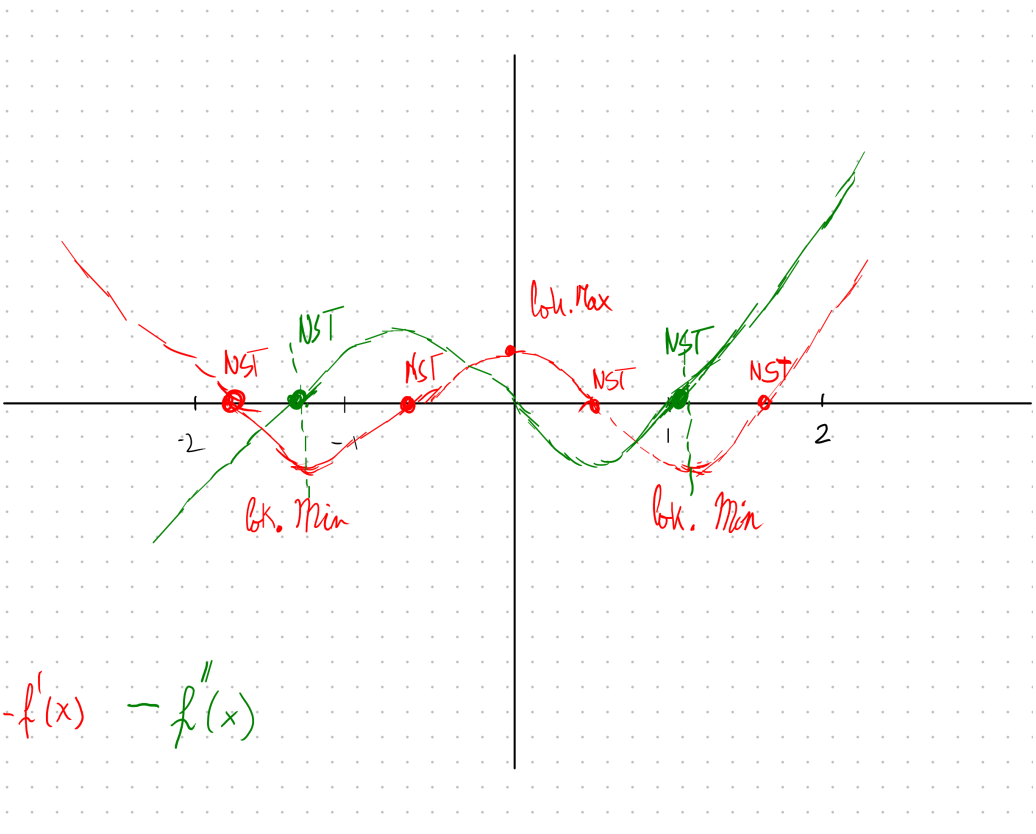
Die folgende Bilder zeigen die Graphen zwei Funktionen. Zeichnen Sie (qualitativ) jeweils den Graphen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion.





1. Graph:


$f(x)$
$f'(x)$
$f''(x)$


lok. Max
NST
NST
NST
NST
NST
NST
lok. Min
lok. Min
-2
-1
1
2
- f'(x)
- f''(x)