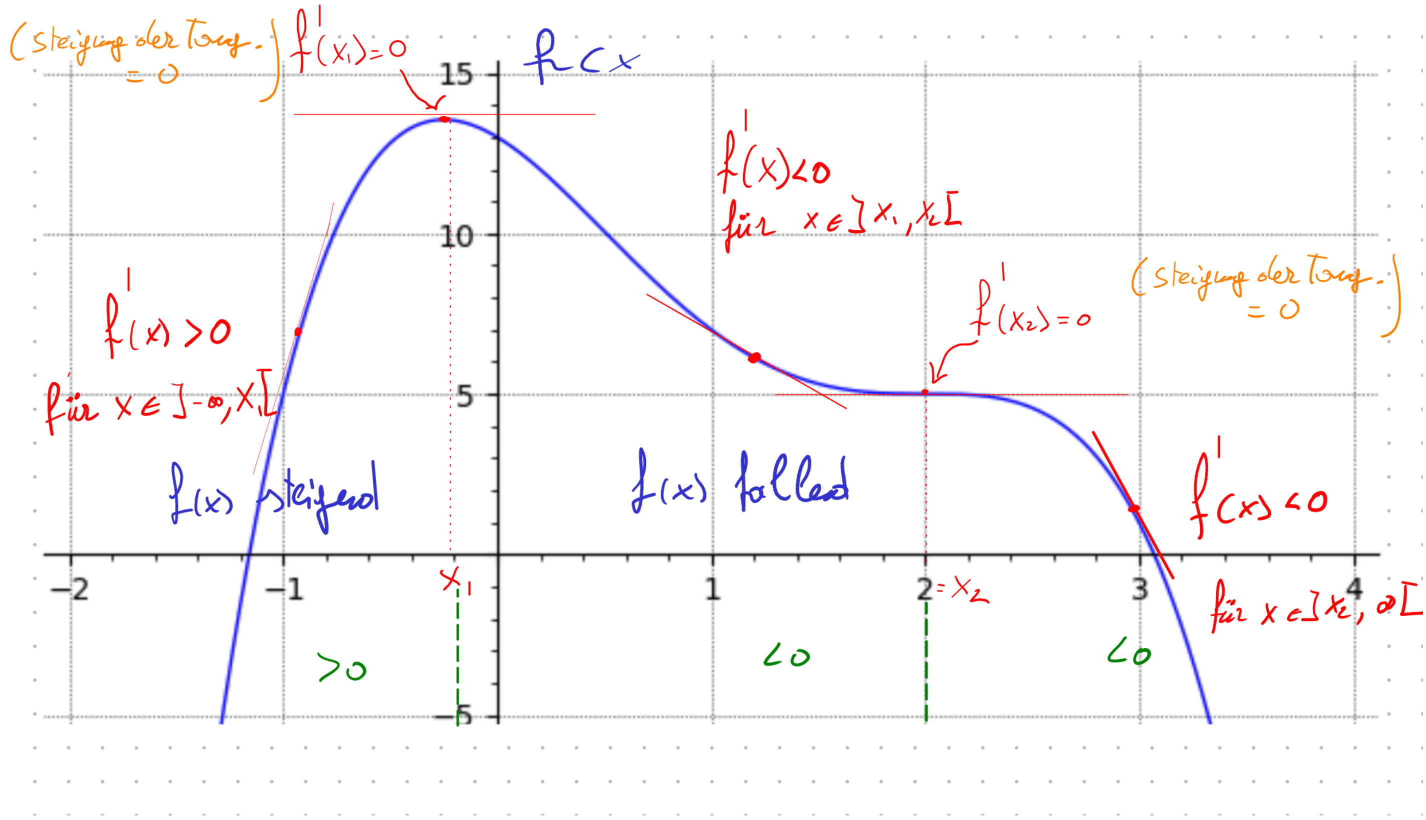
2

ABLEITUNGEN - GRAPHISCHE INTERPRETATION

2.1 AUFGABE

Das folgende Bild zeigt den Funktionsgraphen einer Polynomialfunktion. Bestimmen Sie:

- die Stellen wo $f'(x) = 0$
- die Bereichen wo $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo $f(x)$ steigend bzw. fallend ist
- die Stellen wo $f''(x) = 0$
- die Bereichen wo $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ ist
- die Bereichen wo die erste Ableitung $f'(x)$ steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima) von $f'(x)$.



•) $f'(x) > 0$ für $x < x_1$

$f'(x) < 0$ für $x_1 < x < x_2$ und $x > x_2$

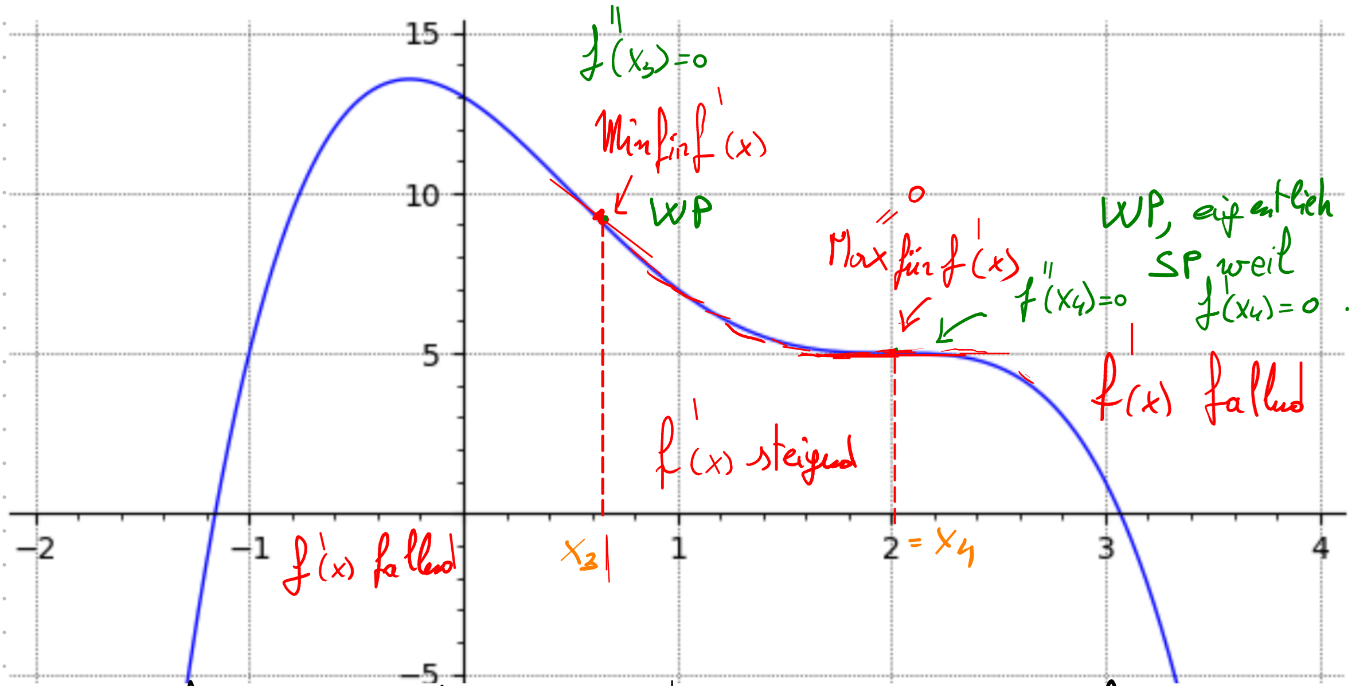
•) allgemein $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ steigend (im Bereich)

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ fallend (im Bereich)

$f(x)$ steigend für $x \le x_1$

$f(x)$ fallend für $x_1 \le x \le x_2$ und $x \ge x_2$

d.h. $x \ge x_1$



Im welchen Bereichen ist $f'(x)$ steigend? steigend für $x_3 \le x \le x_4$

" " " fallend? fallend für $x \le x_3$ und $x \ge x_4$

$f''(x) < 0$ $\quad$ $f''(x_3) = 0$ $\quad$ $f''(x_4) = 0$ Max

$f'(x)$ fallend $\quad$ Min $\quad$ $f'(x)$ steigend $\quad$ $f'(x)$ fallend

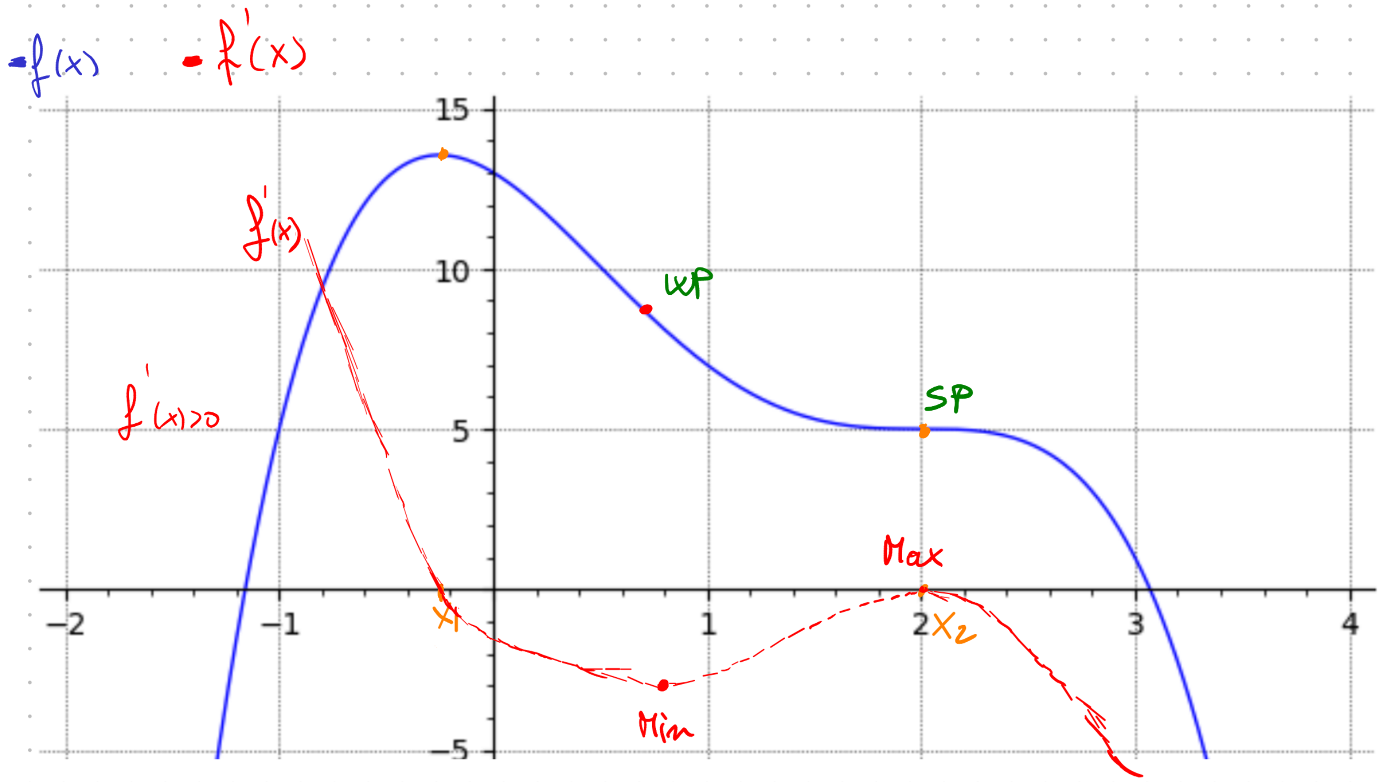
x_3 $\quad$ $f''(x) > 0$ $\quad$ x_4 $\quad$ $f''(x) < 0$

$f'(x)$ fallend für $x \in \,]-\infty, x_3] \cup [x_4, \infty[$

$f''(x) < 0$ für $x \in \,]-\infty, x_3[\,\cup\,]x_4, \infty[$

$f'(x)$ steigend für $x \in [x_3, x_4]$

$f''(x) > 0$ für $x \in \,]x_3, x_4[$



2.2 AUFGABE

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ bestimmen Sie:

- Nullstellen
- Stellen wo die Tangente horizontal ist
- Bereiche wo die Funktion Steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima)

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 \;;\quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x \;;\quad f''(x) = 3x - 4$

•) NST von $f(x)$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right) \Rightarrow \text{NST}: \{x_1 = 0 \,;\, x_2 = 4\}$

•) Tang horizontal $\Leftrightarrow f'(x) = 0$

$\frac{3}{2}x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \{x_1 = 0 \,;\, x_3 = \frac{8}{3}\}$

•) Im welchen Bereiche ist $f(x)$ steigend / fallend ?

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ steigend

$f(x)$ steigend — $f(x)$ fallend — $f(x)$ steigend

$f'(x) > 0$ — $f'(x) < 0$ — $f'(x) > 0$

Max

-1 — $x_1 = 0$ — 1 ← Probe — $x_3 = \frac{8}{3}$ — 3 ← Probe

↑ Probestelle

$f'(x_1) = 0$ — $f'(1) = \frac{3}{2} - 4 < 0$ — $f'(x_3) = 0$ — $f'(3) = \frac{3 \cdot 9}{2} - 12 > 0$

Min

$f'(-1) = \frac{3}{2} + 4 > 0$

$f(x)$ steigend für $x \leq x_1 = 0$ und $x \geq \frac{8}{3}$

$f(0) = 0$ lok. Max. $(0|0)$

$f(8/3) = \approx -4{,}78$ lok. Min $(8/3 \mid -4{,}78...)$

$f(x)$ fallend für $x_1 = 0 \leq x \leq x_2 = 8/3$

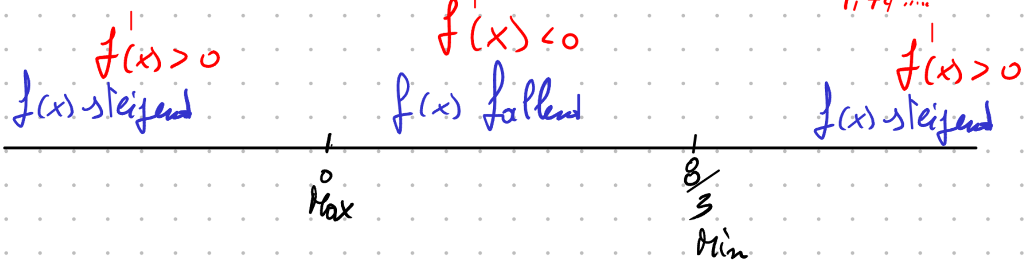
Alternativer Weg

•) zunächst NST. von $f'(x)$ $\{x_1 = 0 \,;\, x_3 = 8/3\}$

•) evaluieren $f''(x_1)$ $f''(x_3)$

$$f''(0) = 3 \cdot 0 - 4 < 0 \Rightarrow (0 \mid \underbrace{f(0)}_{=0}) \text{ lok. Max}$$

$$f''(8/3) = 3 \cdot \frac{8}{3} - 4 = 4 > 0 \Rightarrow \left(\frac{8}{3} \,\middle|\, \underbrace{f(8/3)}_{= -4{,}74....}\right) \text{ lok. Min}$$



2.3 MONOTONIE: FORMALE DEFINITION UND BEISPIELE

- Eine Funktion $f(x)$ heißt **streng monoton steigend** im Intervall I, wenn für beliebige zwei Stellen $x_1,\ x_2 \in I$ aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$.
- Eine Funktion $f(x)$ heißt **schwach monoton steigend** im Intervall I, wenn für beliebige zwei Stellen $x_1,\ x_2 \in I$, aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Die Definition von streng bzw. schwach monoton fallend ist analog.

2.4 KRÜMMUNG: FORMALE DEFINITION UND BEISPIELE

- Eine Funktion $f(x)$ heißt **konvex** (erweist Linkskrümmung) in einem Intervall I, wenn für jede Stelle $x_0 \in I$, die Tangente a.d.S. x_0 liegt unterhalb der Funktionswert.
- Eine Funktion $f(x)$ heißt **konkav** (erweist Rechtskrümmung) in einem Intervall I, wenn für jede Stelle $x_0 \in I$, die Tangente a.d.S. x_0 liegt oberhalb der Funktionswert.
- **Satz:** Ist die Ableitung f' einer stetig differenzierbaren Funktion f im Intervall I positiv (*bzw. negativ*), so ist f in I streng monoton wachsend (*bzw. fallend*).
- **Satz:** Ist die zweite Ableitung f'' von f im Intervall I positiv (*negativ*), so ist die erste Ableitung f' in monoton zunehmend (*abnehemend*) und daher f im Intervall I konvex (*konkav*).

2.5 AUFGABE (FORTSETZUNG)

Für die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$ bestimmen Sie:

- Bereiche wo die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ Steigend bzw. fallend ist
- Lokale Extremwerte (Maxima und Minima) von $f'(x)$
- Bereiche wo die Funktion links-Krümmung (Konvexität) bzw. rechts-Krümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen

·) lokale Extremwert von $f'(x)$

zunächst bestimmen $f''(x) = 0$

$3x - 4 = 0$ $\quad \{x_4 = \frac{4}{3}\}$

hat dort $f'(x)$ ein Max oder Min?

$f'''(x_4) = 3 > 0 \Rightarrow$ $f'(x)$ hat ein lok. Min bei $\left(x_4 = \frac{4}{3} \mid f'(\frac{4}{3}) = -\frac{8}{3}\right)$

Konkav $\xrightarrow{\text{zu}}$ Konvex

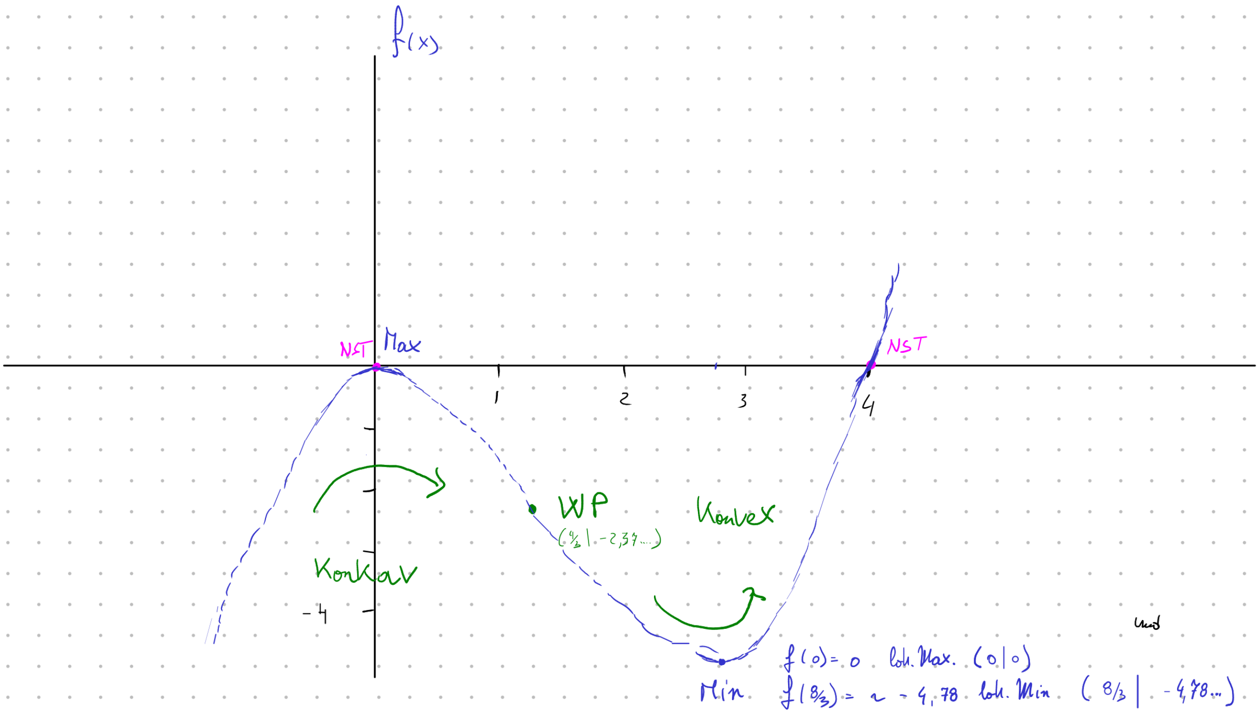
Wendepunkt $\left(x_4 = \frac{4}{3} \mid f(\frac{4}{3}) = -2{,}37\ldots\right)$

$f''(x) < 0$ $\quad f''(\frac{4}{3}) = 0$ $\quad f''(x) > 0$

$x_4 = \frac{4}{3}$

$f'(x)$ fallend $\quad f'$ Min $\quad f'(x)$ steigend

$f(x)$ konkav (Rechtskrümmung) $\quad f(x)$ konvex (linkskrümmung)


f(x)
NST
Max
NST
1
2
3
4
-4
WP
Konkav
Konvex
Min
f(0) = 0 lok. Max. (0|0)
f(8/3) = ≈ -4,78 lok. Min (8/3 | -4,78...)

1. Lösung

   - $f(x) = \frac{1}{2}(x-4)x^2$
   - $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x = \frac{1}{2}(3x-8)x$
   - $f''(x) = 3x - 4$
   - Nullstellen: bei $x = 0$ (doppelte) und $x = 4$ (einfache)
   - Die Tangente ist horizontal, d.h. $f'(x) = 0$, bei $x = \frac{8}{3}$ und $x = 0$
   - Kandidatstellen für Extremwerte: $f'(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = \frac{8}{3}$.
     - $f''(0) = -4$: lokales Maximum mit $f(0) = 0$.
     - $f''(\frac{8}{3}) = 4$: lokales Minimum mit $f(\frac{8}{3}) = -128/27$.
   - Die Funktion ist steigend für $x \in]-\infty, 0] \cup [\frac{8}{3}, \infty[$;
   - Die Funktion ist fallend für $x \in [0, \frac{8}{3}]$