

Elementare Ableitungen

$f(x)$

$f'(x)$

Bsp

• x^a $a \cdot x^{a-1}$

$$x^5 \rightarrow 5 \cdot x^4$$
$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

• $\sin(x)$ $\cos(x)$

• $\cos(x)$ $-\sin(x)$

$\tan(x)$ $\frac{1}{\cos^2(x)}$

$\cot(x)$ $\frac{-1}{\sin^2(x)}$

• e^x e^x

a^x $a^x \cdot \ln(a)$

$$5^x \rightarrow 5^x \cdot \ln(5)$$

• $\ln(x)$ $\frac{1}{x}$

$\log_a(x)$ $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$$\log_2(x) \rightarrow \frac{1}{x \cdot \ln 2}$$

Ableitungsregeln

① Faktorregel

$$f(x) = a \cdot f_1(x) \quad f'(x) = a \cdot f_1'(x)$$

$$f(x) = 5 \cdot \underbrace{x^3}_{f_1(x)} \quad f'(x) = 5 \cdot \underbrace{3 \cdot x^2}_{f_1'(x)} = 15x^2$$

② Summenregel

$$f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \quad f'(x) = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots$$

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{3} \cdot \cos(x) \quad (\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}})$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot (-\sin(x))$$

③ Produktregel

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \quad f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x)$$

$$f(x) = \underbrace{x}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{f_2(x)} \quad f'(x) = 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)$$

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)$$
$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot f_3(x) + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3'(x)$$

④ Quotientenregel

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad f'(x) = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{(f_2(x))^2}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)} \quad f'(x) = \frac{2x \cdot \ln(x) - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} =$$
$$= \frac{2x \cdot \ln(x) - x}{(\ln(x))^2} = \frac{x \cdot (2 \ln(x) - 1)}{(\ln(x))^2}$$

⑤ Kettenregel

$$f(x) = f_1(f_2(x)) \quad f'(x) = f_1'(f_2(x)) \cdot f_2'(x)$$

$$f(x) = \sin(x^2) \quad f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$f(x) = (\ln(2x^3))^4 \quad f'(x) = 4 \cdot (\ln(2x^3))^3 \cdot \frac{1}{2x^3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^2$$

$$x^4 \rightarrow 4x^3$$

äußere Funktion

$$\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

mittlere Funktion

$$2x^3 \rightarrow 6x^2$$

innere Funktion

Bestimmung von Extrempunkten, Sattel- und Wendepunkte

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \text{Minimum bei } (x_0 | f(x_0))$$

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum bei } (x_0 | f(x_0))$$

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } (x_0 | f(x_0))$$

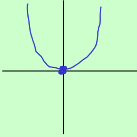
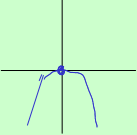
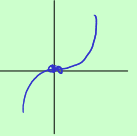
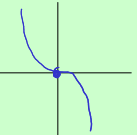
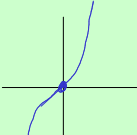
$$f'(x_0) \neq 0 \quad f''(x_0) = 0 \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } (x_0 | f(x_0))$$

Zusammenhang der Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	
steigt an	> 0	$-$	$-$	① oder allg. mehrfache NST von $f'(x)$
fällt ab	< 0	$-$	$-$	
Minimum	$= 0$	> 0 ②	$-$	② oder allg. $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ n-te Ableitung $f^{(n)}(x) > 0$ mit n gerade
Maximum	$= 0$	< 0 ③	$-$	
Sattelpunkt rechts gekrümmt \rightarrow links gekrümmt	$= 0$ (doppelt) ① $=$ Minimum	$= 0$	> 0 ④	③ oder allg. $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ n-te Ableitung $f^{(n)}(x) < 0$ mit n gerade
Sattelpunkt links- \rightarrow rechts- gekrümmt	$= 0$ (doppelt) ① $=$ Maximum	$= 0$	< 0 ⑤	④ oder allg. $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ n-te Ableitung $f^{(n)}(x) > 0$ mit n ungerade
Wendepunkt rechts- \rightarrow links- gekrümmt	$\neq 0$ beliebig $=$ Minimum	$= 0$	> 0 ④	⑤ oder allg. $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n-1)}(x) = 0$ n-te Ableitung $f^{(n)}(x) < 0$ mit n ungerade
Wendepunkt links- \rightarrow rechts- gekrümmt	$\neq 0$ beliebig $=$ Maximum	$= 0$	< 0 ⑤	

(SP sind Spezialfälle von WP)

Beispiele $(x_0 = 0)$

$f(x)$	$f'(x_0)$	$f''(x_0)$	$f'''(x_0)$	$f^{(4)}(x_0)$	$f^{(5)}(x_0)$		
x^4	0	0	0	24	0	Min	
$-x^4$	0	0	0	-24	0	Max	
x^5	0	0	0	0	120	SP Rechtskrümmung → Linkskrümmung	
$-x^5$	0	0	0	0	-120	SP Linkskrümmung → Rechtskrümmung	
$x^5 + x$	1	0	0	0	120	WP Rechtskrümmung → Linkskrümmung	
$-x^5 - x$	-1	0	0	0	-120	WP Linkskrümmung → Rechtskrümmung	