3 FUNKTIONENUNTERSUCHUNG

3.1 AUFGABE

Für die Funktion $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$ im Intervall $[0, 6]$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima)
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ (Nullstellen, Extrema, Krümmung)
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f''(x)$ (Nullstellen, Extrema)
- zeichnen Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

[30. April 2022 at 14:55 – version 0.1]

$f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$ NST $= \{ x_0 = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5 \}$

$f'(x) = (x-1)'(x-3)(x-5) + (x-1)(x-3)'(x-5) + (x-1)(x-3)(x-5)'$

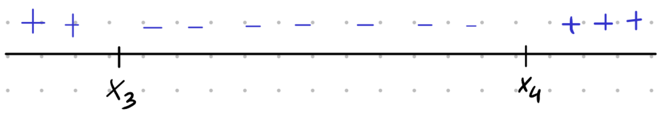
$= (x-3)(x-5) + (x-1)(x-5) + (x-1)(x-3)$

$= x^2 - 3x - 5x + 15 \quad + x^2 - x - 5x + 5 \quad + x^2 - x - 3x + 3$

$= 3x^2 - 18x + 23$

NST von $f'(x)$: $\{ x_3 = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{3},\ x_4 = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \}$

Vorzeichen $f'(x)$:



Es folgt: $f(x)$ streng monoton steigend im Bereich $]-\infty, x_3] \cup [x_4, \infty[$

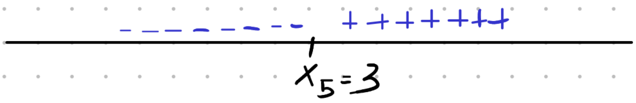
$f(x)$ streng monoton fallend im Bereich $[x_3, x_4]$

$(x_3 = 3 - \frac{2}{3}\sqrt{3},\ f(x_3) \approx 3{,}079)$ lokales Maximum

$(x_4 = 3 + \frac{2}{3}\sqrt{3},\ f(x_4) \approx -3{,}079)$ lokales Minimum

$f''(x) = 6x - 18$ NST von $f''(x)$: $x_5 = 3$

Vorzeichen von $f''(x)$:



Es folgt:

$f''(x_4) \approx 6{,}928 > 0 \Rightarrow (x_4, f(x_4))$ lokales Minimum
(alternative Bestätigung)

$f''(x_3) = \approx -6{,}928 < 0 \Rightarrow (x_3, f(x_3))$ lokales Maximum
(alternative Bestätigung)

$f(x)$ Konvex im Bereich $[3, \infty[$
$f(x)$ Konkav im Bereich $]-\infty, 3]$

WP Konkav -> konvex an der Stelle $(3, f(3))$
Keine SP

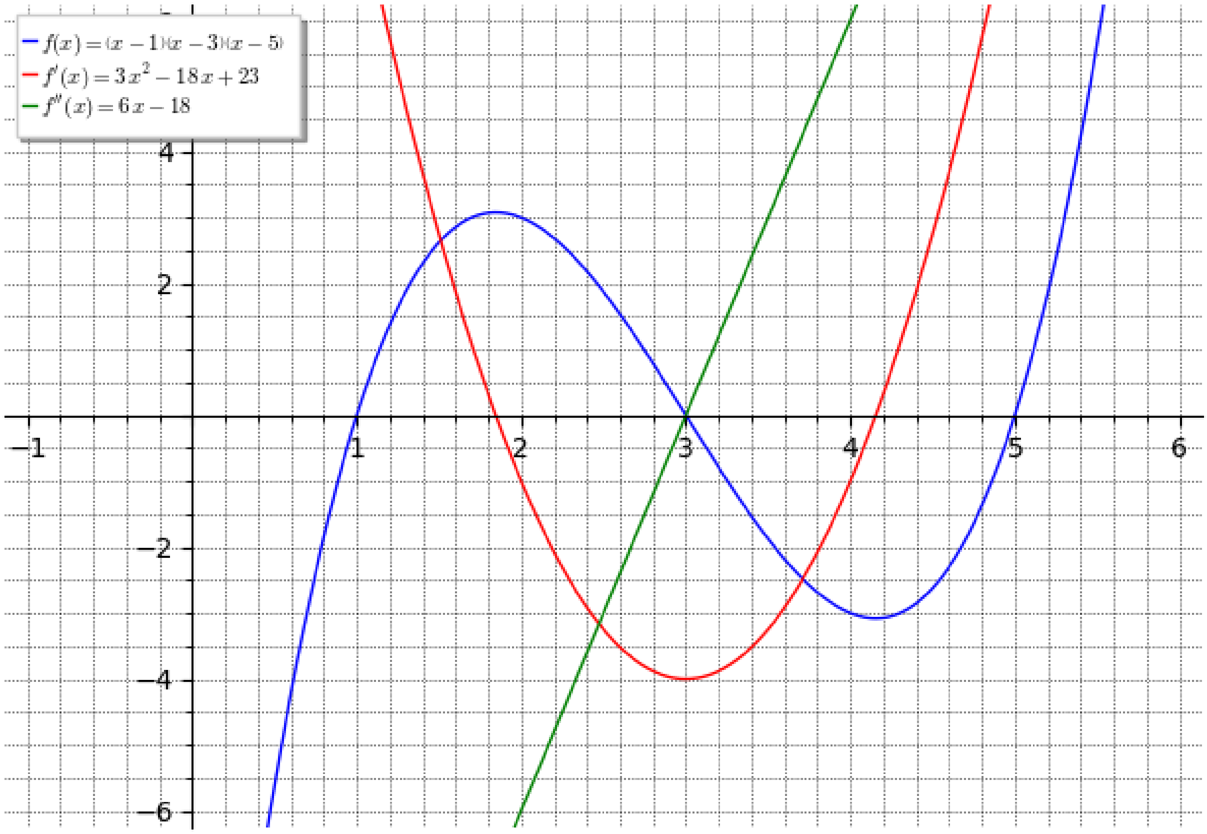
$f'''(x) = 3 > 0$ Es folgt: $f'(x)$ hat ein lokales Minimum $(3, f'(3) = -4)$

$f'(x)$ ist streng monoton fallend (da $f'' < 0$) im Bereich $]-\infty, 3]$

$f'(x)$ ist streng monoton steigend (da $f'' > 0$) im Bereich $[3, \infty[$

(da $f''' > 0$) $f'(x)$ ist überall konvex

1. Lösung
   a) Graph:



3.2 AUFGABE

Für die Funktion x^2e^{-x}:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima)
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ (Nullstellen, Extrema, Krümmung)
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f''(x)$ (Nullstellen, Extrema)
- zeichnen Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^{-x}\right)' = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)$$

$$= 2 \cdot x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x} \cdot (-1)\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(-x^2 + 2x\right) \cdot e^{-x}}}$$

$$f''(x) = \left(-x^2 + 2x\right)' \cdot e^{-x} + \left(-x^2 + 2x\right) \cdot \left(e^{-x}\right)'$$

$$= (-2x + 2) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 2x) \cdot \left(e^{-x} \cdot (-1)\right)$$

$$= \underline{\underline{\left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot e^{-x}}}$$

$$f'''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)' \cdot e^{-x} + \left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot \left(e^{-x}\right)'$$

$$f'''(x) = (2x - 4) \cdot e^{-x} + \left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot \left(e^{-x} \cdot (-1)\right)$$

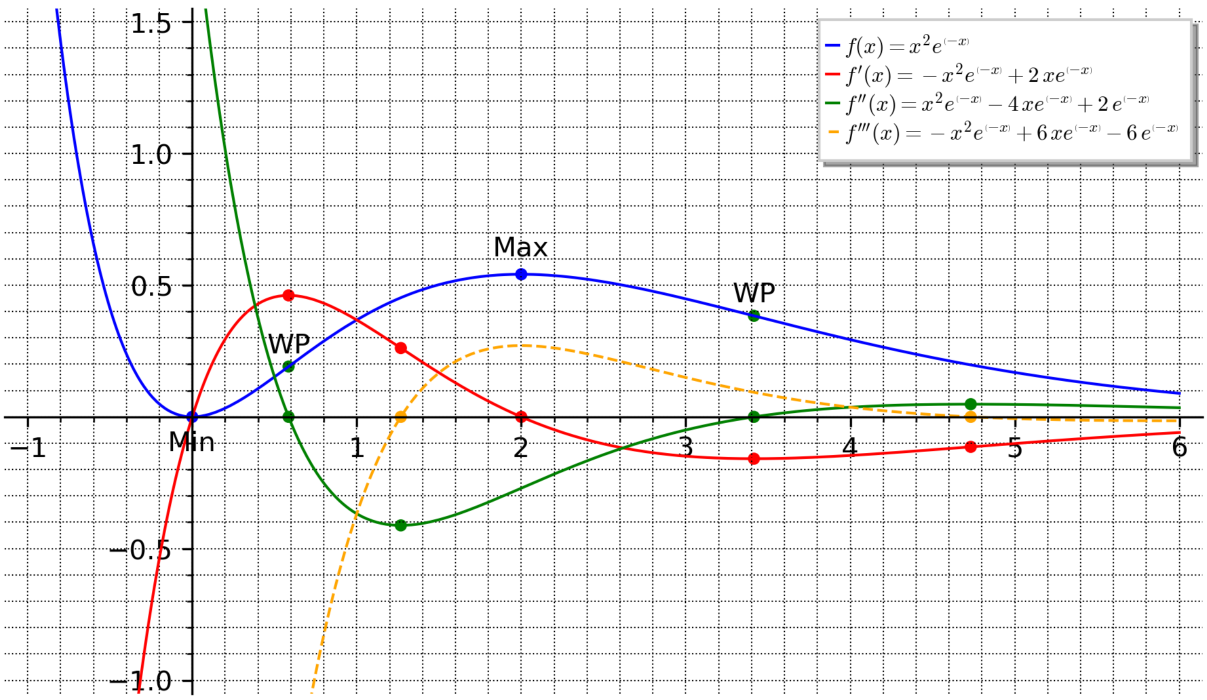
$$= \left(-x^2 + 6x - 6\right) \cdot e^{-x^2}$$

$$= \underline{\underline{-\left(x^2 - 6x + 6\right) \cdot e^{-x^2}}}$$

1. Lösung
   - $f'(x) = -(x-2)xe^{(-x)}$
   - $f''(x) = \left(x^2 - 4x + 2\right)e^{(-x)}$
   - $f'''(x) = -\left(x^2 - 6x + 6\right)e^{(-x)}$
   - Nullstellen von $f(x) = \{x_0 = 0\}$ (doppelte)
   - Nullstellen von $f'(x) = \{x_0 = 0; x_1 = 2\}$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]0,2[$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty,0[\cup]2,\infty[$
   - Es folgt:
     - $(x_0, f(x_0))$ ist ein lokales Minimum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_0 = 0$ $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_0) > 0$.
     - $(x_1, f(x_1))$ ist ein lokales Maximum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_1 = 2$ $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_1) < 0$.
     - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in [0,2]$
     - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty,0] \cup [2,\infty[$
   - Nullstellen von $f''(x)$: $\{x_2 = 2+\sqrt{2}; x_3 = 2-\sqrt{2}\}$
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]-\infty,x_3[\cup]x_2,\infty[$
   - $f''(x) < 0$ für $x \in]x_3,x_2[$
   - Es folgt:
     - $f(x)$ ist konvex für $x \in]-\infty,x_3] \cup [x_2,\infty]$
     - $f(x)$ ist konkav für $x \in [x_3,x_2]$
     - $(x_3, f'(x_3))$ ist ein lokales Maximum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_3 = 2-\sqrt{2}$ $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_3) < 0$. Damit ist $(x_3, f(x_3))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f(x)$.

- $(x_2, f'(x_2))$ ist ein lokales Minimum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_2 = 2+\sqrt{2}$ $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_2) > 0$. Damit ist $(x_2, f(x_2))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f(x)$.

- Nullstellen von $f'''(x)$: $\{x_4 = 3+\sqrt{3}; x_5 = 3-\sqrt{3}\}$
- $f'''(x) > 0$ für $x \in]x_5, x_4[$
- $f'''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, x_5[\cup]x_4, \infty[$
- Es folgt:
  - $(x_4, f''(x_4))$ ist ein lokales Maximum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_4 $f'''(x) > 0$ bzw. $f'''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_4) < 0$. Damit ist $(x_4, f(x_4))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f'(x)$.
  - $(x_5, f''(x_5))$ ist ein lokales Minimum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_5 $f'''(x) < 0$ bzw. $f'''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_5) > 0$. Damit ist $(x_5, f(x_5))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f'(x)$.



3.3 AUFGABE

Für die Funktion $(\cos x)^2$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima)
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- bestimmen Sie Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ (Nullstellen, Extrema, Krümmung)
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f''(x)$ (Nullstellen, Extrema)
- zeichnen Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

$$f'(x) = \left((\cos(x))^2\right)' = 2\cdot\cos(x)\cdot(\cos(x))'$$
$$= 2\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x))$$
$$= \underline{\underline{-2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)}}$$

$$f''(x) = (-2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x))' = -2\cdot(\cos(x))'\cdot\sin(x) - 2\cdot\cos(x)\cdot(\sin(x))'$$
$$= -2\cdot(-\sin(x))\cdot\sin(x) - 2\cdot\cos(x)\cdot\cos(x)$$
$$= \underline{\underline{2\cdot(\sin(x))^2 - 2\cdot(\cos(x))^2}}$$

$$f'''(x) = 4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) - 4\cdot\cos(x)\cdot(-\sin(x)) = \underline{\underline{8\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}}$$

NST von $f'(x)$:

$f'(x) = -2\cdot\cos(x)\cdot\sin(x) = 0$ wenn $\cos(x)$ oder $\sin(x) = 0$

$\Rightarrow$ NST für

$$\underline{\underline{x = \begin{cases} k\cdot\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}}}$$

NST von $f''(x)$:

$f''(x) = 2\cdot(\sin(x))^2 - 2\cdot(\cos(x))^2 = 0$ wenn $(\sin(x))^2 = (\cos(x))^2$

$\Rightarrow \cos(x) = \pm\sin(x)$

$\Rightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\cdot\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi, & k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

NST von $f'''(x)$ = $\underline{\text{NST von } f'(x)}$

1. Lösung

   - $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$
   - $f''(x) = -2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2$
   - $f'''(x) = 8\cos(x)\sin(x)$
   - Nullstellen von $f(x) = \{\pi/2 + k \cdot \pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}$
   - Nullstellen von $f'(x) = \{\{k \cdot \pi/2; \quad k \in \mathbb{Z}\}$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]\pi/2 + k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]0 + k \cdot \pi, \pi/2 + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - Es folgt:
     - $\{(\pi/2 + k \cdot \pi, 0); \quad k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(\pi/2 + k \cdot \pi) > 0$.
     - $\{(0 + k \cdot \pi, 0); \quad k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(0 + k \cdot \pi) < 0$.
   - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in]\pi/2 + k \cdot \pi, \pi + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]0 + k \cdot \pi, \pi/2 + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - Nullstellen von $f''(x) : \{pi/4 + k \cdot \pi/2; \; k \in \mathbb{Z}\}$
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]\pi/4 + k \cdot \pi, 3/4 \cdot \pi + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - $f''(x) < 0$ für $x \in] - /pi/4 + k \cdot \pi, \pi/4 + k \cdot \pi[; \; k \in \mathbb{Z}$
   - Es folgt:
     - $f(x)$ ist konvex für $x \in]\pi/4 + k \cdot \pi, 3/4 \cdot \pi + k \cdot \pi[; \quad k \in \mathbb{Z}$
     - $f(x)$ ist konkav für $x \in]-\pi/4 + k \cdot \pi, \pi/4 + k \cdot \pi[; \quad k \in \mathbb{Z}$
     - Damit sind $\{(\pi/4 + k, \; f(\pi/4 + k))\}$ und $\{(-\pi/4 + k, \; f(-\pi/4 + k))\}$ konvex/konkav bzw. konkav/konvex Wendepunkte für $f(x)$

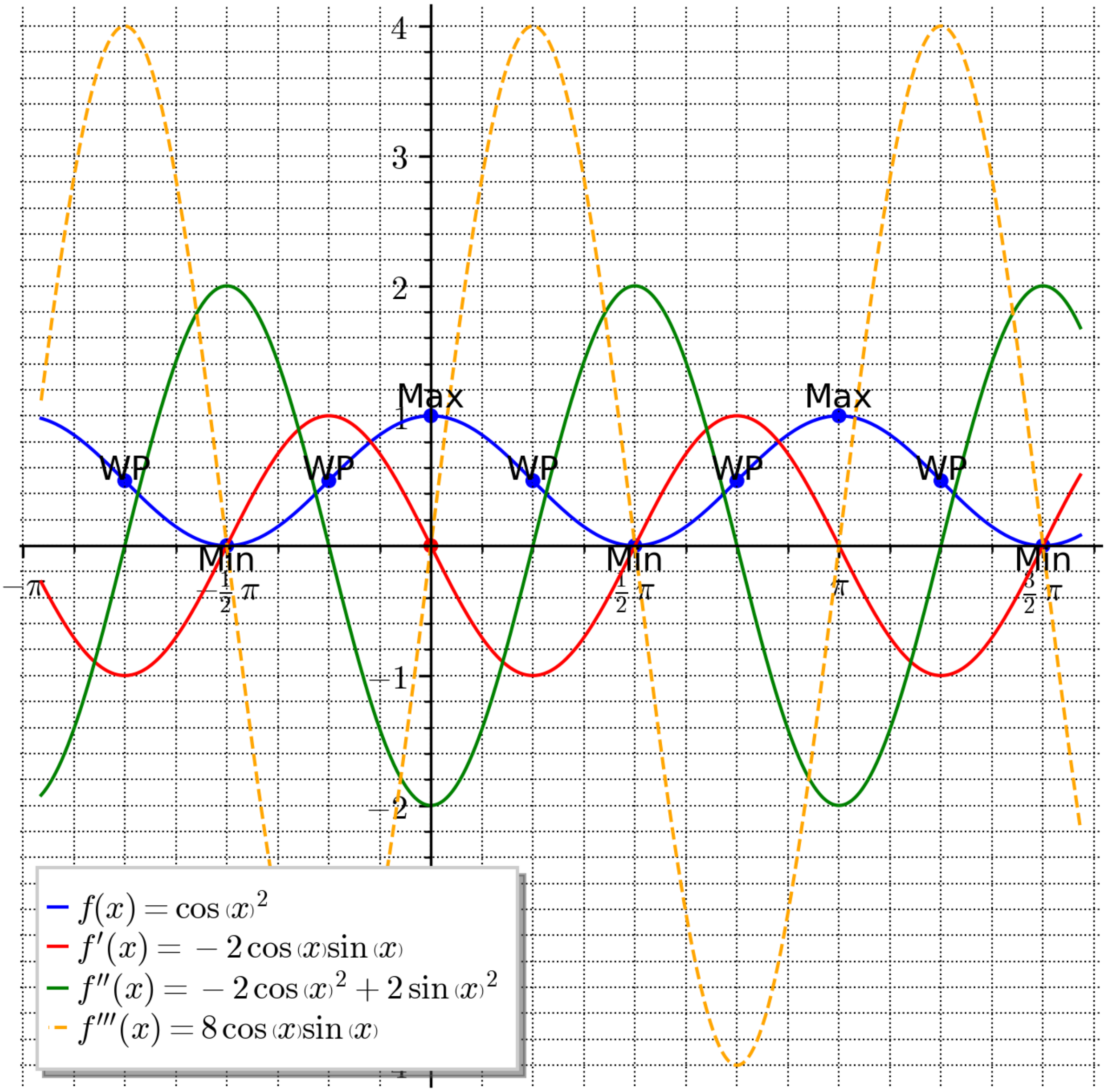
- $\{(\pi/4 + k \cdot \pi/2, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f'(x)$, da links bzw. rechts davon $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(\pi/4 + k \cdot \pi) > 0$.
- $\{(-\pi/4 + k \cdot \pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f'(x)$, da links bzw. rechts davon $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(-\pi/4 + k \cdot \pi) < 0$.
- $f'(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in]\pi/4 + k \cdot \pi/2,\ 3/4 \cdot \pi + k \cdot \pi/2[;\ k \in \mathbb{Z}$
- $f'(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]-\pi/4 + k \cdot \pi/2,\ \pi/4 + k \cdot \pi/4[;\ k \in \mathbb{Z}$

• Nullstellen von $f'''(x) = \{\{0 + k \cdot \pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$

• $f'''(x) > 0$ für $x \in]-\pi/4 + k \cdot \pi,\ \pi/4 + k \cdot \pi[;\ k \in \mathbb{Z}$

• $f'''(x) < 0$ für $x \in]\pi/4 + k \cdot \pi,\ 3/4 \cdot \pi + k \cdot \pi[;\ k \in \mathbb{Z}$

• Es folgt:
  - $\{(0 + k \cdot \pi, 1);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f''(x)$, da links bzw. rechts davon $f'''(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(0 + k \cdot \pi) > 0$.
  - $\{(\pi/2 + k \cdot \pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f''(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(\pi/2 + k \cdot \pi) < 0$.



Max
Max
WP
WP
WP
WP
WP
Min
Min
Min
$-\pi$
$-\frac{1}{2}\pi$
$\frac{1}{2}\pi$
π
$\frac{3}{2}\pi$
4
3
2
1
−1
−2
$f(x) = \cos(x)^2$
$f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$
$f''(x) = -2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2$
$f'''(x) = 8\cos(x)\sin(x)$

3.4 AUFGABE

Für die Funktion $f(x) = (x+1)(x-1)e^x$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima)
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ (Nullstellen, Extrema, Krümmung)
- untersuchen Sie die erste Ableitungsfunktion $f''(x)$ (Nullstellen, Extrema)
- zeichnen Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

1. Lösung
   - $f'(x) = \left(x^2 + 2\,x - 1\right)e^x$
   - $f''(x) = \left(x^2 + 4\,x + 1\right)e^x$
   - $f'''(x) = (x+5)(x+1)e^x$
   - Nullstellen von $f(x) = \{x_0 = -1, x_1 = 1\}$
   - Nullstellen von $f'(x) = \left[x_2 = -\sqrt{2} - 1, x_3 = \sqrt{2} - 1\right]$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]0, x_2 = -\sqrt{2} - 1[$ und $]x_3 = \sqrt{2} - 1], \infty[$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]x_2, x_3[$
   - Es folgt:
     - $(x_2, f(x_2))$ ist ein lokales Minimum für $f(x)$, da links bzw. rechts von x_2 $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_2) > 0$.
     - $(x_1, f(x_3))$ ist ein lokales Maximum für $f(x)$, da links bzw. rechts von x_3 $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_3) < 0$.
     - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in \ [x_2, x_3]$
     - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in]-\infty, x_2] \cup [x_3, \infty[$
   - Nullstellen von $f''(x)$: $\left[x_4 = -\sqrt{3} - 2, x_5 = \sqrt{3} - 2\right]$
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]-\infty, x_4[\cup]x_5, \infty[$
   - $f''(x) < 0$ für $x \in]x_4, x_5[$
   - Es folgt:
     - $f(x)$ ist konvex für $x \in]-\infty, x_4] \ \cup \ [x_5, \infty[$
     - $f(x)$ ist konkav für $x \in \ [x_4, x_5]$
     - $(x_4, f'(x_4))$ ist ein lokales Maximum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von x_4 $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_4) < 0$. Damit ist $(x_3, f(x_3))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f(x)$.

- $(x_5, f'(x_5))$ ist ein lokales Minimum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von x_5 $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_5) > 0$. Damit ist $(x_2, f(x_2))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f(x)$.

- Nullstellen von $f'''(x)$: $[x_6 = -5-2, x_7 = -1]$
- $f'''(x) < 0$ für $x \in]x_6, x_7[$
- $f'''(x) > 0$ für $x \in]-\infty, x_6[\cup]x_7, \infty[$
- Es folgt:
  - $(x_6, f''(x_6))$ ist ein lokales Maximum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_6 $f'''(x) > 0$ bzw. $f'''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_6) < 0$. Damit folgt ebenso, dass $(x_6, f(x_6))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f'(x)$ ist.
  - $(x_7, f''(x_7))$ ist ein lokales Minimum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_7 $f'''(x) < 0$ bzw. $f'''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_7) > 0$. Damit folgt ebenso, dass $(x_7, f(x_7))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f'(x)$ ist.