3 FUNKTIONSUNTERSUCHUNG

Themen:

- Höhere Ableitungen *[Şa] §3.9*
- Kurvendiskussion *[Pa1] §IV.3.6*,

3.1 AUFGABE

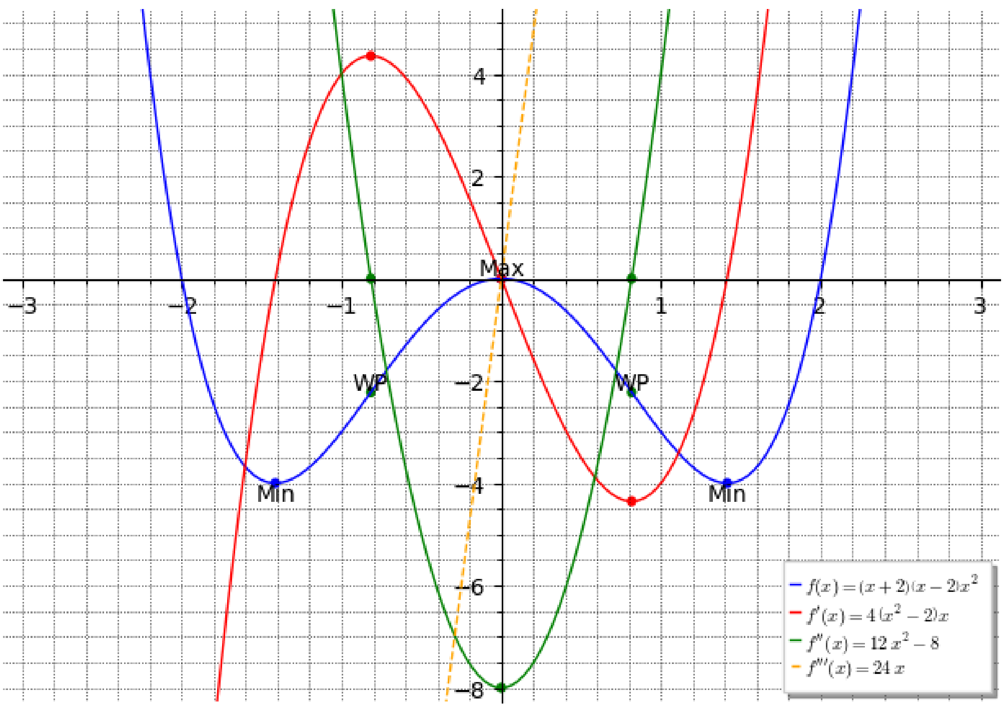
Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$.

- Untersuchen Sie $f(x)$ sowie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ und die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$
- Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$
- Vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

1. Lösung
   - $f'(x) = 4\left(x^2 - 2\right)x$
   - $f''(x) = 12\,x^2 - 8$
   - $f'''(x) = 24\,x$
   - Nullstellen von $f(x) = \{x_0 = 0\}$ (doppelte), $x_{0l} = -2$ und $x_{0r} = 2$
   - Nullstellen von $f'(x) : \{x_0 = 0; x_{1l} = -\sqrt{2}; x_{1r} = \sqrt{2}\}$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]-\sqrt{2},\, 0[$ und $]\sqrt{2},\, -\infty[$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]-\infty,\, -\sqrt{2}[$ und $]0,\, \sqrt{2}[$
   - Es folgt:
     - $(x_{1l}, f(x_{1l}))$ ist ein lokales Minimum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_{0l} = -2$ $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_{1l}) > 0$.
     - $(x_{1r}, f(x_{1r}))$ ist ein lokales Minimum für $f(x)$, da links bzw. rechts von $x_{0r} = 2$ $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_{1r}) > 0$.
     - $(x_0, f(x_0))$ ist ein lokales Maximum für $f(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(x_0) < 0$.
     - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in]-\sqrt{2},\, 0] \cup [\sqrt{2},\, -\infty[$
     - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in]-\infty,\, -\sqrt{2}] \cup [0,\, \sqrt{2}[$
   - Nullstellen von $f''(x)$: $\{x_2 = \sqrt{2/3}; x_3 = -\sqrt{2/3}\}$
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]-\infty, x_3[\, \cup\,]x_2, \infty[$
   - $f''(x) < 0$ für $x \in]x_3, x_2[$
   - Es folgt:
     - $f(x)$ ist konvex für $x \in]-\infty, x_3] \;\cup\; [x_2, \infty]$
     - $f(x)$ ist konkav für $x \in \; [x_3, x_2]$

- $(x_3, f'(x_3))$ ist ein lokales Maximum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_3 = 2 - \sqrt{2}$ $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_3) < 0$. Damit ist $(x_3, f(x_3))$ ein konvex/konkav Wendepunkt für $f(x)$.
- $(x_2, f'(x_2))$ ist ein lokales Minimum für $f'(x)$, da links bzw. rechts von $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(x_2) > 0$. Damit ist $(x_2, f(x_2))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f(x)$.

* Nullstellen von $f'''(x)$: $\{x_4 = 0\}$
* $f'''(x) > 0$ für $x \in]0, \infty[$
* $f'''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, 0[$
* Es folgt:
  - $(x_4, f''(x_4))$ ist ein lokales Minimum für $f''(x)$, da links bzw. rechts von x_4 $f'''(x) < 0$ bzw. $f'''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f^{(iv)}(x_4) > 0$. Damit ist $(x_4, f'(x_4))$ ein konkav/konvex Wendepunkt für $f'(x)$.



3.2 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos x$.

- Untersuchen Sie $f(x)$ sowie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ und die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$
- Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$
- Vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

1. Lösung
   - $f'(x) = -\sin(x)$
   - $f''(x) = -\cos(x)$
   - $f'''(x) = \sin(x)$
   - Nullstellen von $f(x) = \{\pi/2 + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
   - Nullstellen von $f'(x) = \{\{k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]0 + k \cdot 2\pi, \pi + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]-\pi + k \cdot 2\pi, 0 + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
   - Es folgt:
     - $\{(\pi + k \cdot 2\pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) < 0$ bzw. $f'(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(\pi + k \cdot 2\pi) > 0$.
     - $\{(0 + k \cdot 2\pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f(x)$, da links bzw. rechts davon $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f''(0 + k \cdot 2\pi) < 0$.
   - $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in [-\pi + k \cdot 2\pi, 0 + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$
   - $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in [0 + k \cdot \pi, \pi + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$
   - Nullstellen von $f''(x) : \{\pi/2 + k \cdot \pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]\pi/2 + k \cdot 2\pi, 3/2 \cdot \pi + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
   - $f''(x) < 0$ für $x \in]-\pi/2 + k \cdot 2\pi, \pi/2 + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
   - Es folgt:
     - $f(x)$ ist konvex für $x \in [\pi/2 + k \cdot 2\pi, 3/2 \cdot \pi + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$
     - $f(x)$ ist konkav für $x \in [-\pi/2 + k \cdot 2\pi, \pi/2 + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$
     - Damit sind $\{(\pi/2 + k \cdot 2\pi, f(\pi/2 + k \cdot 2\pi))\}$ und $\{(-\pi/2 + k \cdot 2\pi, f(-\pi/2 + k \cdot 2\pi))\}$ konkav/konvex bzw. konvex/-konkav Wendepunkte für $f(x)$

- $\{(\pi/2 + k \cdot 2\pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f'(x)$, da links bzw. rechts davon $f''(x) < 0$ bzw. $f''(x) > 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(\pi/2 + k \cdot 2\pi) > 0$.
- $\{(-\pi/2 + k \cdot 2\pi, 0);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f'(x)$, da links bzw. rechts davon $f''(x) > 0$ bzw. $f''(x) < 0$ gilt. Alternative Begründung: $f'''(-\pi/2 + k \cdot 2\pi) < 0$.
- $f'(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in [\pi/2 + k \cdot 2\pi,\ 3/2 \cdot \pi + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$
- $f'(x)$ ist streng monoton fallend für $x \in [-\pi/2 + k \cdot 2\pi,\ \pi/2 + k \cdot 2\pi];\ k \in \mathbb{Z}$

- Nullstellen von $f'''(x) = \{\{0 + k \cdot \pi/2;\ k \in \mathbb{Z}\}$
- $f'''(x) < 0$ für $x \in]-\pi + k \cdot 2\pi,\ 0 + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
- $f'''(x) > 0$ für $x \in]0 + k \cdot 2\pi,\ \pi + k \cdot 2\pi[;\ k \in \mathbb{Z}$
- Es folgt:
  - $\{(\pi + k \cdot 2\pi, 1);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Maxima für $f''(x)$, da links bzw. rechts davon $f'''(x) > 0$ bzw. $f'''(x) < 0$ gilt.
  - $\{(\ 0 + k \cdot \pi, -1);\ k \in \mathbb{Z}\}$ sind lokale Minima für $f''(x)$, da links bzw. rechts davon $f'''(x) < 0$ bzw. $f'''(x) > 0$ gilt.