3 FUNKTIONSUNTERSUCHUNG

3.1 AUFGABE

Für die Funktion $x^4 - 3x^3 + 2x^2$:

- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima)
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion monoton steigend bzw. fallend ist
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- bestimmen Sie Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
- untersuchen Sie jeweils die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$ und die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$.
- Skizzieren Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 3x + 2)$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 9 \cdot x^2 + 4x \qquad D_{f'} = \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 - 18x + 4 \qquad D_{f''} = \mathbb{R}$

$f'''(x) = 24x - 18 \qquad D_{f'''} = \mathbb{R}$

NST von $f(x)$: $\quad x^2 \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$

$x^2 \to 0$; P-q-Formel $\to 1,\ 2$

3 NST gefunden

$x_1 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

NST von $f'(x)$ $\quad 4x^3 - 9 \cdot x^2 + 4x = 0$

$x \cdot (4x^2 - 9x + 4) = 0$

$x = 0$

$x_1 = 0$ NST von $f'(x)$

$$x_4 = \frac{9 + \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \ldots$$

$$x_5 = \frac{9 - \sqrt{9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \ldots$$

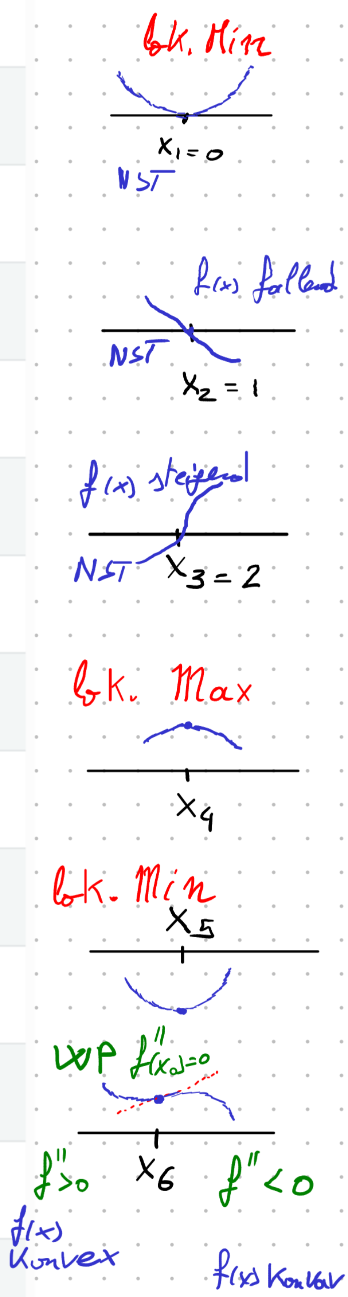
NST von $f''(x)$ $\quad 12x^2 - 18x + 4 = 0$

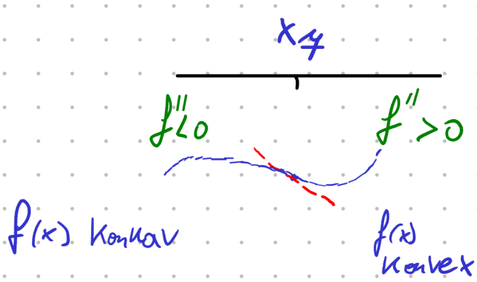
$$x_6 = \frac{18 + \sqrt{18^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4}}{2 \cdot 12} = \ldots$$

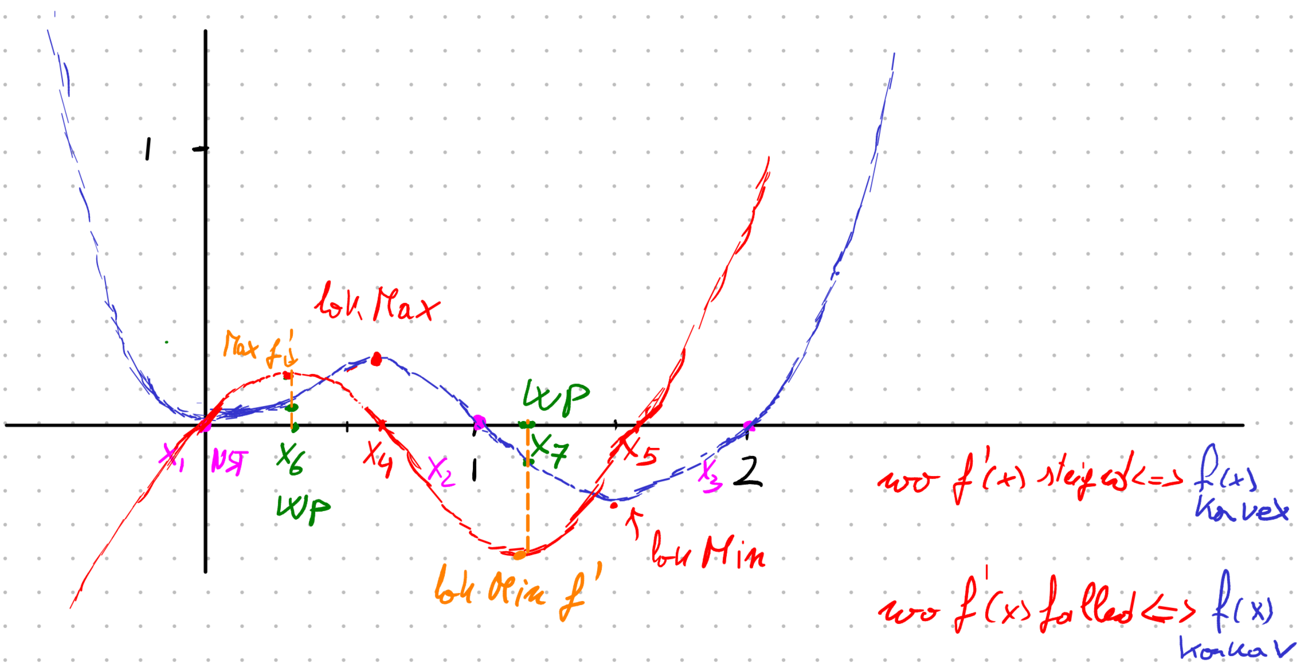
$$x_7 = \frac{18 - \sqrt{18^2 - 4 \cdot 12 \cdot 4}}{2 \cdot 12} = \ldots$$

(approximierte Werte)

	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)
$x_1 = 0.0$	0.0	0.0	4.0 >0	-18.0
$x_2 = 1.0$	0.0	-1.0	-2.0	6.0
$x_3 = 2.0$	0.0	4.0	16.0	30.0
$x_4 = 0.61$	0.2	0.0	-2.51	-3.37
$x_5 = 1.64$	-0.62	-0.0	6.76	21.37
$x_6 = 0.27$	0.09	0.5	0.0	-11.49
$x_7 = 1.23$	-0.27	-1.25	0.0	11.49







lokales Minimum bei x_1 mit $f(x_1) = 0$ (NST)

bei $x_5 \approx 1{,}64$ mit $(f(x_5) \approx -0{,}62)$

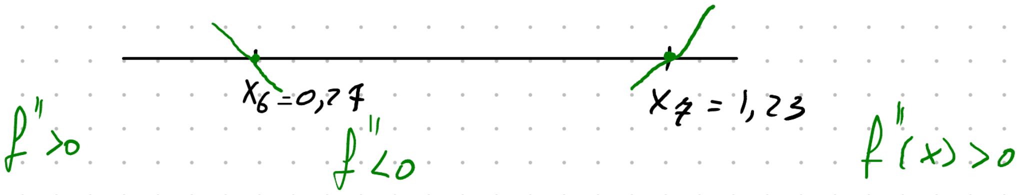
lokales Maximum bei $x_4 \approx 0{,}61$ mit $f(x_4) \approx 0{,}2$

$f'(x) > 0$ für $x \in]0, x_4[\cup]x_5, +\infty[$

d.h. $f(x)$ ist steigend für $x \in [0, x_4] \cup [x_5, \infty[$

$f' < 0$ für $x \in]-\infty, x_1 = 0[\cup]x_4, x_5[$

$f(x)$ ist fallend für x in $]-\infty, x_1 = 0] \cup [x_4, x_5]$



$f''(x) > 0$ für x in $]-\infty, x_6[\cup]x_4, \infty[$

$f''(x) < 0$ für x in $]x_6, x_4[$

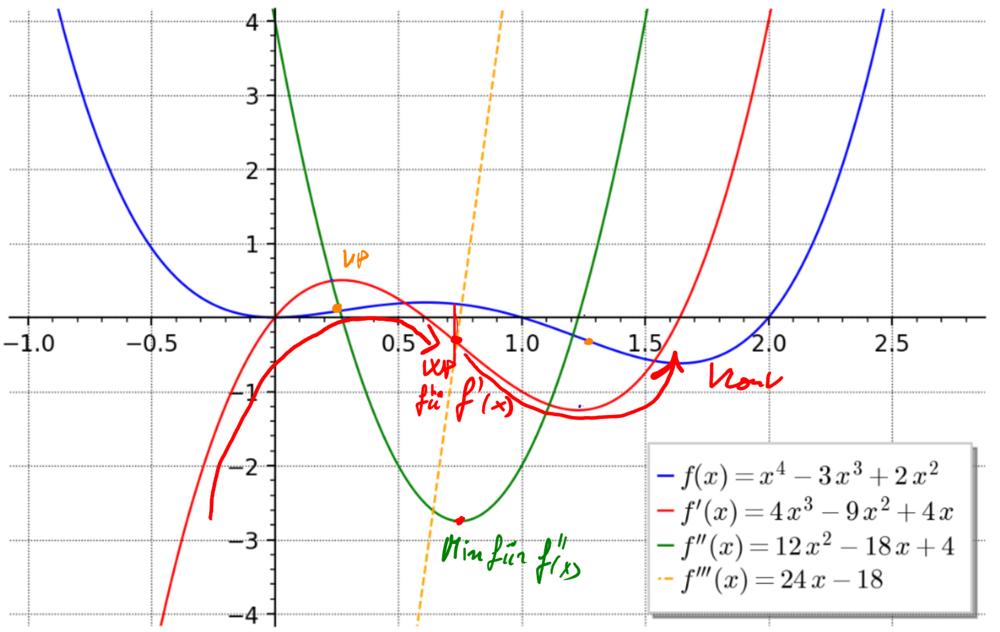
$f(x)$ Konvex für x in $]-\infty, x_6] \cup [x_4, \infty[$

$f(x)$ Konkav für x in $[x_6, x_4]$

Wendepunkt $(x_6 \mid 0{,}09)$ konvex / konkav Übergang

$(x_4 \mid -0{,}74)$ konkav / konvex Übergang

Sattelpunkte: keine



3.2 AUFGABE

Für die Funktion $\frac{x^2}{x+1}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$:

- bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$
- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die (lokale und globale) Extremwerte
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Steigend bzw. fallend ist
- Bereiche wo die Funktion Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
- untersuchen Sie jeweils die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$.
  - bestimmen Sie die Extremwerte (Maxima und Minima) von $f'(x)$
  - bestimmen Sie Bereiche wo $f'(x)$ monoton steigend bzw. fallend ist
  - bestimmen Sie Bereiche wo $f'(x)$ Linkskrümmung (Konvexität) bzw. Rechtskrümmung (Konkavität) aufweist
- Skizzieren Sie den Graphen von $f'(x)$ und $f''(x)$
- vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$ und $f''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

$f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ $\qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\cdot(x+1) - x^2\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x\cdot(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+2x)'\cdot(x+1)^2 - (x^2+2x)\cdot\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(2x+2)\cdot(x+1)^{\cancel{2}} - (x^2+2x)\cdot 2\cdot\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{2x} + \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x^2} \cancel{-4x}}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

NST von $f(x)$ $\qquad \frac{x^2}{x+1} = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ (doppelte NST)

NST von $f'(x)$ $\qquad \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = 0$ $\quad$ wo $\quad x^2 + 2x = 0$

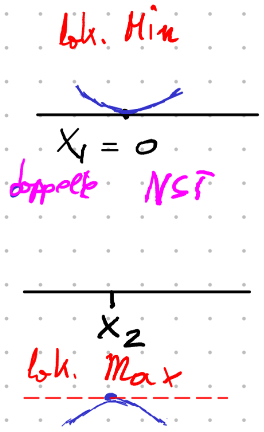
$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

NST von $f''(x)$ $\qquad \frac{2}{(x+1)^3} = 0$??

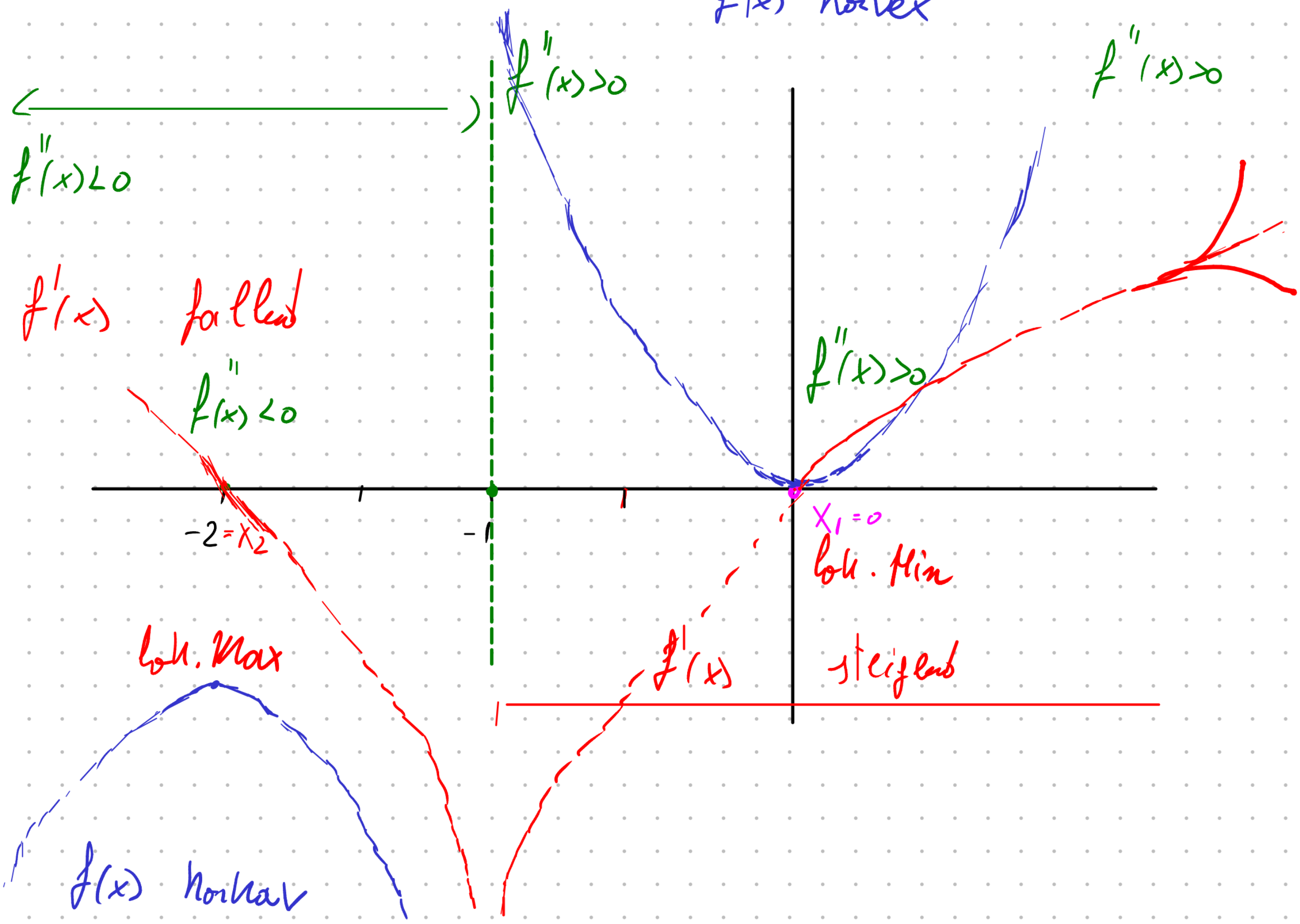
Keine.

	f(x)	f'(x)	f''(x)	f'''(x)
$x_1 = 0.0$	0.0	0.0	2.0	-6.0
$x_2 = -2.0$	-4.0	0.0	-2.0	-6.0
Polstelle $x_3 = -1.0$	n.d.	n.d	n.d	n.d



Keine WP vorhanden

f(x) konvex

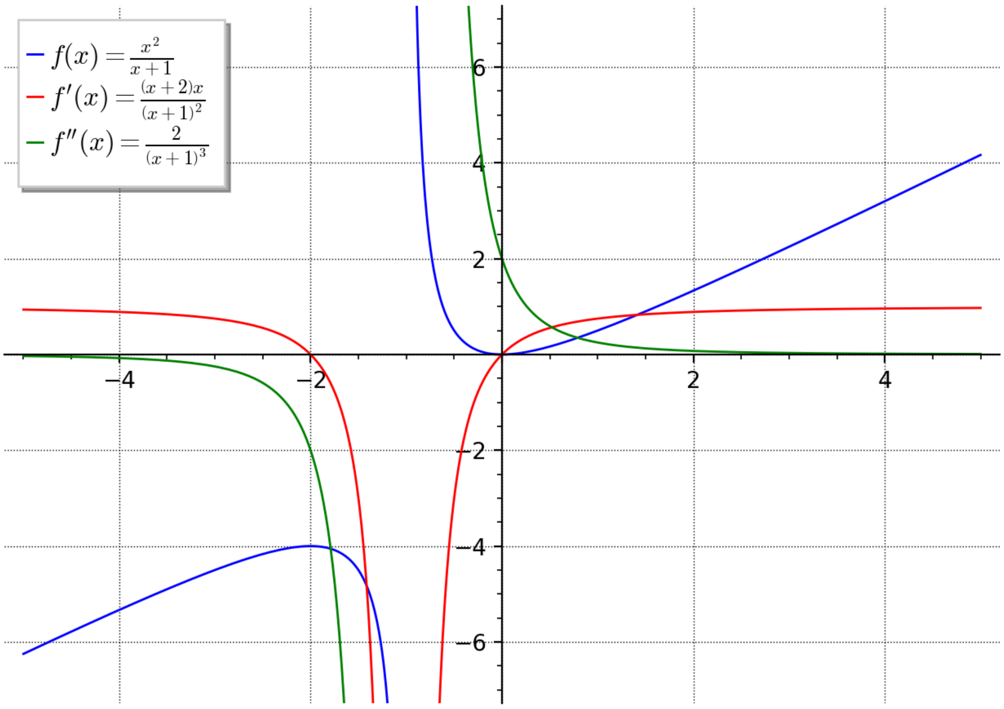


1. Tabelle mit Ableitungswerte

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
$x_1 = 0.0$	0.0	0.0	2.0	-6.0
$x_2 = -2.0$	-4.0	0.0	-2.0	-6.0
$x_3 = -1.0$	n.d.	n.d	n.d	n.d

2. Lösung
   - $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
   - $f'(x) = \frac{(x+2)x}{(x+1)^2}$
   - $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$
   - $f'''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$
   - Nullstellen von $f(x)$: bei $x = 0$ (doppelte) und $x = -1$
   - Die Tangente ist horizontal, d.h. $f'(x) = 0$, bei $x = -2$ und $x = 0$
   - Kandidatstellen für Extremwerte: $f'(x) = 0$ und $x = -2$.
     - $f''(0) = 2$: lokales Minimum mit $f(0) = 0$.
     - $f''(-2) = -2$; lokales Maximum mit $f(0-2) = -4$.
   - $f'(x) > 0$ für $x \in]-\infty, -2[\cup]0, \infty[$;
   - $f'(x) < 0$ für $x \in]-2, -1[\ \cup\ ]-1, 0[$;
   - Die Funktion ist steigend für $x \in]-\infty, -2] \cup [0, \infty[$;
   - Die Funktion ist fallend für $x \in\ [-2, -1[\ \cup\ ]-1, 0]$;
   - $f''(x) > 0$ für $x \in]-1, \infty[$;
   - $f''(x) < 0$ für $x \in]-\infty, 1[$;
   - Die Funktion ist konvex (Links-Krümmung) für $x \in]-1, \infty[$;
   - Die Funktion ist konkav (Rechts-Krümmung) für $x \in]-\infty, 1[$;

- Wendepunkte: keine!



3.3 AUFGABE

Für die Funktion $x \ln(x^2)$:

- bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$
- bestimmen Sie die Nullstellen
- bestimmen Sie die Extremwerte
- bestimmen Sie Bereiche wo die Funktion Steigend bzw. fallend ist
- Bereiche wo die Funktion links-Krümmung (Konvexität) bzw. rechts-Krümmung (Konkavität) aufweist
- Wendepunkte und Sattelpunkte
- zeichnen Sie den Graphen

- Untersuchen Sie jeweils die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$, die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$ und die dritte Ableitungsfunktion $f'''(x)$
- Zeichnen Sie den Graphen von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$
- Vergleichen Sie das Verhalten von $f(x)$ (Steigung- und Abstiegsbereiche, Extrema, Krümmungsbereiche, Wendepunkte) mit dem Verhalten von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ (Vorzeichen, Nullstellen, Extremwerte, Steigungs- und Abstiegsbereiche).

✓

Dieses Beispiel wurde nicht besprochen.

1. Tabelle mit Ableitungswerte

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
$x_1 = -1.0$	0.0	2.0	−2.0	−2.0
$x_2 = 0.0$	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.
$x_3 = 1.0$	0.0	2.0	2.0	−2.0
$x_4 = -0.37$	0.74	0.0	−5.44	−14.78
$x_5 = 0.37$	−0.74	0.0	5.44	−14.78

2. Graph