4

TANGENTENVERFAHREN NACH NEWTON

4.1 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \sin(x+1) \cdot e^{2-x} - 1$. Zu bestimmen ist die Nullstelle in $[1, 2]$

- Wählen Sie nach dem Konvergenzkriterium eine geeignete Anfangsstellen, um die Nullstelle zu bestimmen, mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,0001$.
- Verifizieren Sie, ob das Konvergenzkriterium für jeden Iterationsschritt erfüllt wurde.

1. Lösung

   a) Ableitungen

   $$f'(x) = (\cos(x+1) - \sin(x+1))e^{(-x+2)}$$
   $$f''(x) = -2\cos(x+1)\,e^{(-x+2)}$$

   b) Verifizierung des Kriteriums für $x = 1$ und $x = 2$

      - Für $x_0 = 1, \quad f(x_0) \cdot f''(x_0)/f'(x_0)^2 = 0.25650$; Kriterium erfüllt
      - Für $x_0 = 2, \quad f(x_0) \cdot f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -1.32918$; Kriterium nicht erfüllt

   c) Berechnung der Nullstelle mit Anfangswert $x_0 = 1$ und maximaler Abweichung $\epsilon < 0,0001$

   Iteration 0: $x_0 = 1.00000$ $f(x_0) = 1.47173$
   Iteration 1: $x_1 = 1.40848$ $f(x_1) = 0.20904$
   Iteration 2: $x_2 = 1.49040$ $f(x_2) = 0.00898$
   Iteration 3: $x_3 = 1.49425$ $f(x_3) = 0.00004$

4.2 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \ln(x+1) \cdot \cos(x) + 1$ Zu bestimmen ist die Nullstelle in $[2, 3]$

- Wählen Sie nach dem Konvergenzkriterium eine geeignete Anfangsstellen, um die Nullstelle zu bestimmen, mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,0001$.
- Verifizieren Sie, ob das Konvergenzkriterium für jeden Iterationsschritt erfüllt wurde.

1. Lösung
   a) Ableitungen

$$f'(x) = -\ln(x+1)\sin(x) + \frac{\cos(x)}{x+1}$$

$$f''(x) = -\cos(x)\ln(x+1) - \frac{\cos(x)}{x^2+2x+1} - \frac{2\sin(x)}{x+1}$$

   b) Verifizierung des Kriteriums für $x_0 = 2,5$
      - Für $x_0 = 2,5$, $f(x_0) \cdot f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -0.00277$; Kriterium erfüllt

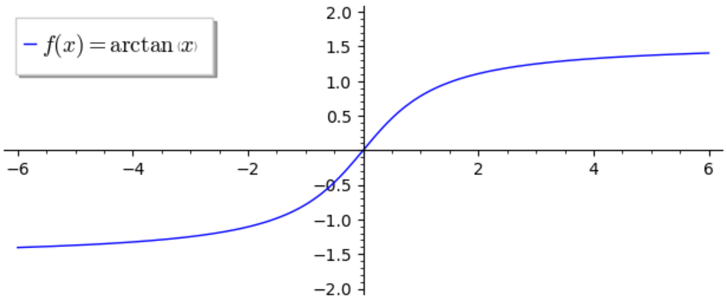
   c) Berechnung der Nullstelle mit Anfangswert $x_0 = 2,5$ und maximaler Abweichung $\epsilon < 0,0001$

Iteration 0:	x_0 = 2.50000	$f(x_0)$ = -0.0036430527
Iteration 1:	x_1 = 2.4962774	$f(x_1) = 5.0235540 \cdot 10^{-6}$

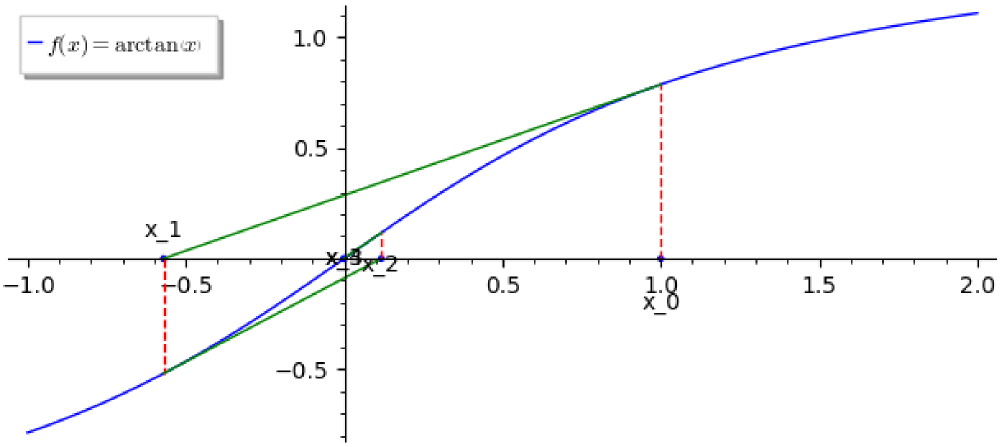
4.3 AUFGABE

Das folgende ist der Graph der Funktion $\arctan x$.

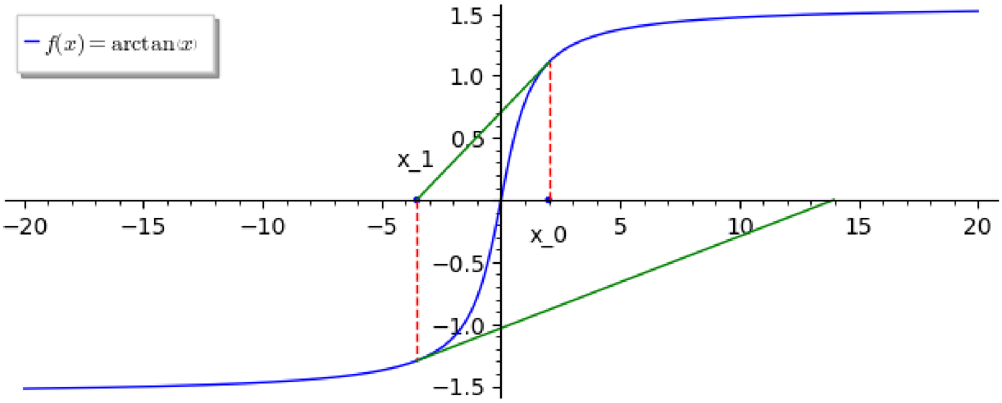
- Um eine approximierte Nullstelle zu Bestimmen, führen Sie vier Iterationen jeweils mit Anfang $x_0 = 2$ und $x_0 = 1$. Kommentieren Sie das Ergebnis.



1. Lösung



Mit Anfangstelle $x_0 = 1$ das Verfahren konvergiert in wenigen Schritten zur Nullstelle.



Mit Anfangstelle $x_0 = 2$ das Verfahren konvergiert nicht, die berechnete Werte werden immer ferner von der Nullstelle, die Berechnung explodiert!