4 TANGENTENVERFAHREN NACH NEWTON

Themen:

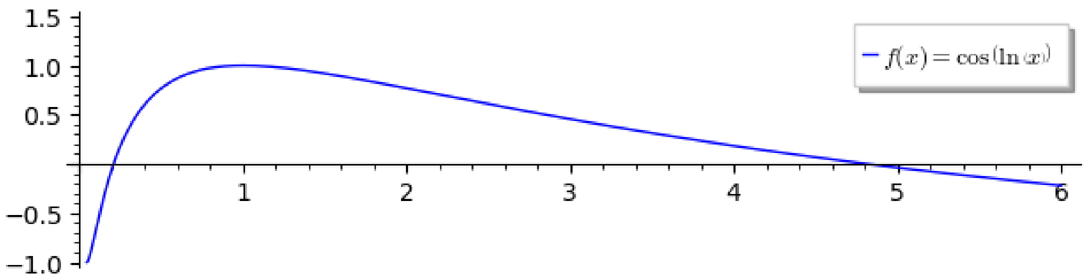
- Tangentenverfahren von Newton *[Pa1] §IV.3.7.1-2*

4.1 AUFGABE

Das folgende ist der Graph der Funktion $\cos(\ln(x))$.

- Wählen Sie $x_0 = 3,2$ als Anfangsstelle, verifizieren Sie dass sie nach dem Konvergenzkriterium geeignet ist, und bestimmen Sie eine approximierte Nullstelle x^* von $f(x)$ mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,0001$.

- Verifizieren Sie, ob das Konvergenzkriterium für jeden Iterationsschritt erfüllt wurde.



1. Lösung:

   Anmerkung: wegen unterschiedlicher Abrundungsmethoden, kleine Abweichungen zwischen Ihrer und den unten stehenden numerischen Werte sind möglich. Das Endergebnis soll trotzdem äquivalent sein.

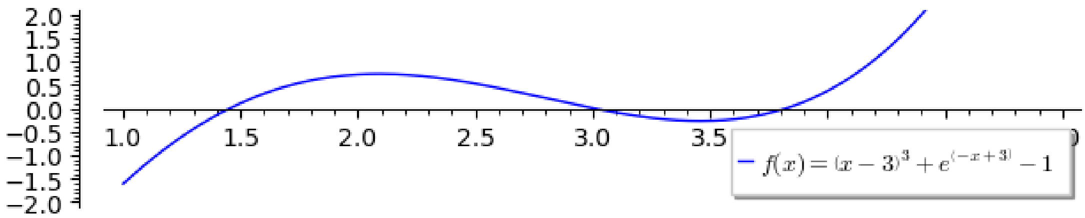
```
Iteration 0: x_0 = 3.2000000,   f(x_0) = 0.39644888,
   f'(x_0) = -0.28689275,    f''(x_0) = 0.050938273,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = 0.24535351
Iteration 1: x_1 = 4.5818714,   f(x_1) = 0.048669580,
   f'(x_1) = -0.21799279,    f''(x_1) = 0.045258928,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.046352973
Iteration 2: x_2 = 4.8051337,   f(x_2) = 0.0011114560,
   f'(x_2) = -0.20811063,    f''(x_2) = 0.043261922,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.0011102214
Iteration 3: x_3 = 4.8104744,   f(x_3) = 6.1752764e-7,
   f'(x_3) = -0.20787970,    f''(x_3) = 0.043213945,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 6.1752726e-7
```

   $x^* = x_3 = 4.81047$ mit $f(x^*) = 6.16754 \cdot 10^{-7}$

4.2 AUFGABE

Das folgende ist der Graph der Funktion $(x-3)^3 + e^{-x+3} - 1$.

- Wählen Sie nach dem Konvergenzkriterium geeignete Anfangsstellen, um die drei Nullstellen zu bestimmen, mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,0001$.
- Wiederholen Sie das Verfahren, einmal mit $x_0 = 1,99$ unnd einmail mit $x_0 = 2,00$ als Anfangstelle. Interpretieren Sie das Ergebnis.



1. Lösung

   Anmerkung: wegen unterschiedlicher Abrundungsmethoden, kleine Abweichungen zwischen Ihrer und den unten stehenden numerischen Werte sind möglich. Das Endergebnis soll trotzdem äquivalent sein.

   - Erste Frage:
     - Erste Nullstelle. Wir wählen z.B. $x_0 = 1,3$:

```
Iteration 0: x_0 = 1.3000000,   f(x_0) = -0.43905260,
   f'(x_0) = 3.1960526,    f''(x_0) = -4.7260526,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = 0.20313618
Iteration 1: x_1 = 1.4373734,   f(x_1) = -0.044287398,
   f'(x_1) = 2.5540685,    f''(x_1) = -4.6044224,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.031260092
Iteration 2: x_2 = 1.4547133,   f(x_2) = -0.00069113076,
   f'(x_2) = 2.4744169,    f''(x_2) = -4.5824043,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.00051725878
Iteration 3: x_3 = 1.4549927,   f(x_3) = -1.7881393e-7,
```

```
f'(x_3) = 2.4731371,    f''(x_3) = -4.5820380,
f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 1.3395646e-7
```

Gefunden wurde die approximierte Nullstelle $x^* = x_3 = 1.4549927$ mit $f(x^*) = -1.7881393e-7 = 0,00000017881393$

- Zweite Nullstelle. Wir wählen z.B. $x_0 = 3,1$:

```
Iteration 0: x_0 = 3.1000000,   f(x_0) = -0.094162583,
   f'(x_0) = -0.87483742,    f''(x_0) = 1.5048375,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -0.18514554
Iteration 1: x_1 = 2.9923656,   f(x_1) = 0.0076631494,
   f'(x_1) = -1.0074887,    f''(x_1) = 0.96185732,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.0072616873
Iteration 2: x_2 = 2.9999718,   f(x_2) = 0.000028189272,
   f'(x_2) = -1.0000282,    f''(x_2) = 0.99985906,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.000028183710
```

Gefunden wurde die approximierte Nullstelle $x^* = x_2 = 2,9999718$ mit $f(x^*) = 0,000028189272$

- Dritte Nullstelle. Wir wählen z.B. $x_0 = 4$:

```
Iteration 0: x_0 = 4.0000000,   f(x_0) = 0.36787944,
   f'(x_0) = 2.6321206,    f''(x_0) = 6.3678795,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = 0.33813397
Iteration 1: x_1 = 3.8602346,   f(x_1) = 0.059639452,
   f'(x_1) = 1.7969478,    f''(x_1) = 5.5844703,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.10314418
Iteration 2: x_2 = 3.8270453,   f(x_2) = 0.0030417708,
   f'(x_2) = 1.6146720,    f''(x_2) = 5.3996112,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.0062997067
Iteration 3: x_3 = 3.8251614,   f(x_3) = 9.5767900e-6,
   f'(x_3) = 1.6045099,    f''(x_3) = 5.3891329,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 0.000020047214
```

Gefunden wurde die approximierte Nullstelle $x^* = x_3 = 3,8251614$ mit $f(x^*) = 9,5767900 \cdot 10^{-6}$

- Zweite Frage:

```
Iteration 0: x_0 = 1.9900000,   f(x_0) = 0.71530002,
   f'(x_0) = 0.31469899,    f''(x_0) = -3.3143990,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -23.938798
Iteration 1: x_1 = -0.28296574,   f(x_1) = -9.7286519,
   f'(x_1) = 5.6788856,    f''(x_1) = 6.9569121,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = -2.0986641
Iteration 2: x_2 = 1.4301612,   f(x_2) = -0.062827677,
   f'(x_2) = 2.5873082,    f''(x_2) = -4.6131594,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.043296535
Iteration 3: x_3 = 1.4544442,   f(x_3) = -0.0013571903,
   f'(x_3) = 2.4756501,    f''(x_3) = -4.5827568,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 0.0010148200
Iteration 4: x_4 = 1.4549924,   f(x_4) = -6.9290400e-7,
   f'(x_4) = 2.4731380,    f''(x_4) = -4.5820383,
   f(x_4)f''(x_4)/f'(x_4)^2 = 5.1908093e-7
```

Gefunden wurde die approximierte Nullstelle $x^* = x_3 = 1,4549924$ mit $f(x^*) = 6,8917871 \cdot 10^{-7}$

```
Iteration 0: x_0 = 2.0000000,   f(x_0) = 0.71828183,
   f'(x_0) = 0.28171817,    f''(x_0) = -3.2817182,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -29.700683
Iteration 1: x_1 = -0.54964677,   f(x_1) = -10.924499,
   f'(x_1) = 2.9989540,    f''(x_1) = 13.503142,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = -16.401998
Iteration 2: x_2 = 3.0931230,   f(x_2) = -0.088111033,
   f'(x_2) = -0.88506572,    f''(x_2) = 1.4698195,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = -0.16532680
Iteration 3: x_3 = 2.9935699,   f(x_3) = 0.0064505301,
   f'(x_3) = -1.0063268,    f''(x_3) = 0.96787032,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 0.0061650207
Iteration 4: x_4 = 2.9999799,   f(x_4) = 0.000020101666,
   f'(x_4) = -1.0000201,    f''(x_4) = 0.99989948,
   f(x_4)f''(x_4)/f'(x_4)^2 = 0.000020098838
```

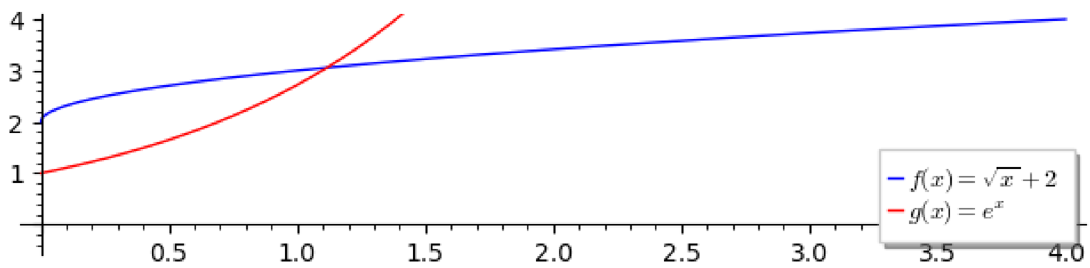
Gefunden wurde diesmal die approximierte Nullstelle $x_4 = 2,9999799$ mit $f(x^*) = 0,000020101666$

In einer Umgebung von $x = 2$ ist die Tangente praktisch horizontal, deswegen kleine Änderungen entscheiden, ob das Verfahren die linke bzw. die rechte Nullstelle findet.

4.3 AUFGABE

Das folgende Bild stellt die Graphen der Funktionen $f(x) = \sqrt{x} + 2$ und $g(x) = e^x$.

- Wählen Sie nach dem Konvergenzkriterium eine geeignete Anfangsstelle, um den Treffpunkt der zwei Kurven zu bestimmen, mit Genauigkeit $|f(x^*) - g(x^*)| < 0,0001$.



1. Lösung

   Anmerkung: wegen unterschiedlicher Abrundungsmethoden, kleine Abweichungen zwischen Ihrer und den unten stehenden numerischen Werte sind möglich. Das Endergebnis soll trotzdem äquivalent sein.

   Wir werden eine Nullstelle für die Differenzfunktion $f(x) - g(x)$ suchen und wählen $x_0 = 0,8$ als Anfangsstelle.

```
Iteration 0: x_0 = 0.80000000,    f(x_0) = 0.66888626,
   f'(x_0) = -1.6665239,     f''(x_0) = -2.5749266,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -0.62014609
Iteration 1: x_1 = 1.2013661,    f(x_1) = -0.22858725,
   f'(x_1) = -2.8684799,     f''(x_1) = -3.5145129,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.097636797
Iteration 2: x_2 = 1.1216768,    f(x_2) = -0.010905214,
   f'(x_2) = -2.5978953,     f''(x_2) = -3.2804426,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.0053005791
Iteration 3: x_3 = 1.1174791,    f(x_3) = -0.000028863549,
   f'(x_3) = -2.5841495,     f''(x_3) = -3.2687695,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 0.000014128588
```

Gefunden wurde den approximierten Treffpunkt $x^* = x_3 = 1,1174791$, $f(x^*) = 3,05710884018629$ und mit $f(x^*) - g(x^*) = -0,000028863549$.