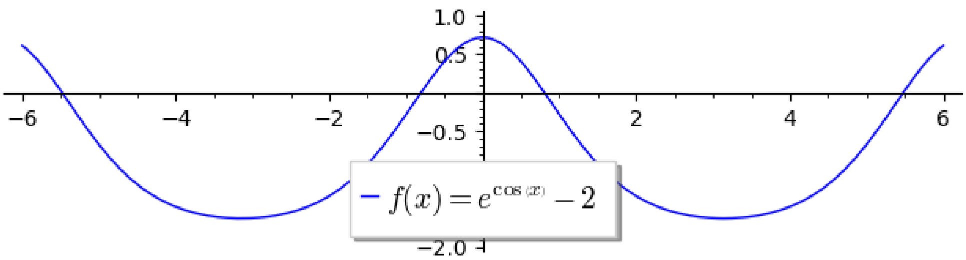
4 TANGENTENVERFAHREN NACH NEWTON

4.1 AUFGABE

Der folgende ist der Graph der Funktion $e^{\cos x} - 2$.

- Wählen Sie $x_0 = 0,5$ als Anfangsstelle, verifizieren Sie dass sie nach dem Konvergenzkriterium geeignet ist, und bestimmen Sie eine Approximierung x^* für die kleinste positive Nullstelle von $f(x)$ mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,0001$.
- Verifizieren Sie, ob das Konvergenzkriterium für jeden Iterationsschritt erfüllt wurde.
- Bestimmen Sie Approximierungen für alle weitere Nullstellen.



$f(x) = \exp(\cos(x)) - 2$

Keine Formel für NST existiert!

$f'(x) = \exp(\cos(x)) \cdot (\cos(x))'$

(Kettenregel)

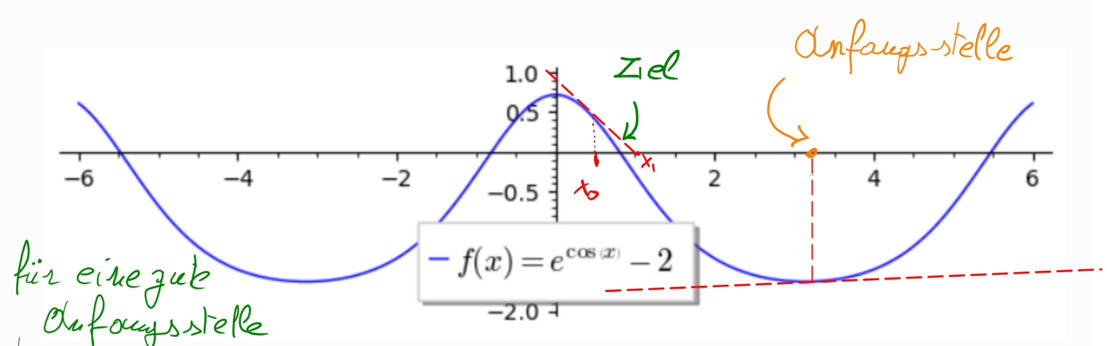
$= -\exp(\cos(x)) \cdot \sin(x)$

$$f''(x) = -\left(\exp(\cos(x))\right)' \cdot \sin(x) - \exp(\cos(x)) \cdot (\sin(x))' \quad \text{(Produktregel)}$$

$$= -\left(-\exp(\cos(x)) \cdot \sin(x)\right) \cdot \sin(x) - \exp(\cos(x)) \cdot \cos(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$= \exp(\cos(x)) \cdot (\sin(x)^2 - \cos(x))$$

Anfangsstelle $x_0 = 0{,}5$ Gefragte Genauigkeit $|f(x^*)| < 0{,}0001$



•) Kriterium für eine gute Anfangsstelle

$$\left| \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{f'(x_0)^2} \right| < 1$$

Konvergenzkriterium für die Stelle x_0:

Numerische Werte mit 5 bedeutenden Stellen

$f(0{,}5) = 0{,}40508$

$f'(0{,}5) = -1{,}1531$

$f''(0{,}5) = -1{,}5578$

$$\left| \frac{0{,}40508 \cdot (-1{,}5578)}{(-1{,}1531)^2} \right| = |-0{,}476..| < 1, \text{ Kriterium erfüllt.}$$

I. Iteration

allgemein $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0{,}5 - \frac{0{,}40508}{(-1{,}1531)} = 0{,}85131$$

$f(x_1) = f(0{,}85131) = -0{,}067143$ da $|-0{,}067143| > 0{,}0001$ ist, noch eine Iteration nötig.

Konvergenzkriterium für x_1

$f(x_1) = -0{,}067143$

$f'(x_1) = -1{,}4538$

$f''(x_1) = -0{,}18030$

$$\left| \frac{(-0{,}067143)\cdot(-0{,}18030)}{(-1{,}4538)^2} \right| = 0{,}0057 < 1$$

erfüllt

2. Iteration

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0{,}85131 - \frac{(-0{,}067143)}{(-1{,}4538)} = 0{,}80512$$

$f(x_2) = -0{,}00025063$

noch eine Iteration nötig

3. Iteration

Konvergenzkriterium

$f(x_2) = -0{,}00025063$

$f'(x_2) = -1{,}4417$

$f''(x_2) = -0{,}34656$

$$\left| \frac{(-0{,}00025063)\cdot(-0{,}34656)}{(-1{,}4417)^2} \right| = 0{,}000041\ldots < 1$$

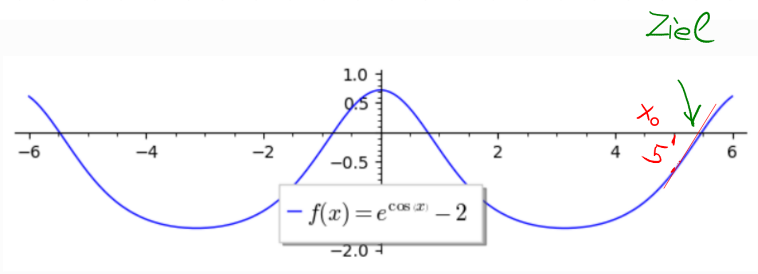
erfüllt

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0{,}80512 - \frac{(-0{,}00025063)}{(-1{,}4417)} = 0{,}80495$$

$f(x_3) = 1{,}90255 \cdot 10^{-7} = 0{,}000000190255$

also $|f(x_3)| < 0{,}0001$ d.h. $x_3 = x^*$ ist passende approximierte NST mit der gewünschten Genauigkeit.

Bestimmung einer anderen NST



Anfangsstelle

$x_0 = 5$

Anfangskriterium $\left|\dfrac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{f'(x_0)^2}\right| < 1$?

$f(5) = -0,6702$

$f'(5) = 1,2734$

$f''(5) = 0,84443$

$$\frac{-0,6702 \cdot 0,84443}{(1,2734)^2} = -0,3499$$

OK

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 5 - \left(\frac{-0,6702}{1,2734}\right) = 5,5277$$

Zu groß

$f(x_1) = 0,070835$ noch eine Iteration nötig

wert verifizieren

Kriterium $\left|\dfrac{f(x_1)\cdot f''(x_1)}{f'(x_1)^2}\right| = \dfrac{0,070835 \cdot (-0,53399)}{(1,4918)^2} = -0,018\ldots$ ok

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 5,5277 - \frac{0,0070935}{1,4918} = 5,4802$$

$f(x_2) = 0,0028318$ ... noch eine Iteration nötig ...

3. Iteration Kriterium $\left|\dfrac{f(x_2)\cdot f''(x_2)}{f'(x)^2}\right| = \ldots$ erfüllt < 1 !

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 5,4802 - \frac{0,0020318}{1,4409} = 5,4782.$$

$$f(x_3) = -7,4605 \cdot 10^{-6} = -0,0000074605$$

Ende des Verfahrens,

$x_3 = x^* = 5,4782.$ da $|-7,4605 \cdot 10^{-6}| < 0,0001$

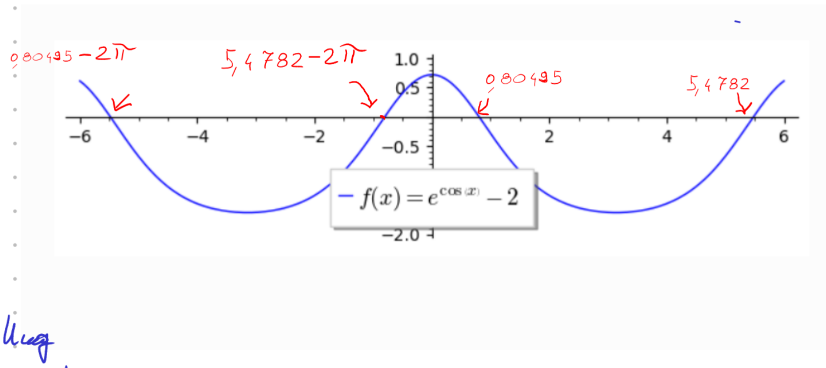
Anmerkung $f(x)$ ist periodisch mit Periode 2π

Menge von approximierten NST:

$\{0,80495 + k \cdot 2\pi\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$

und

$\{5,4782 + k \cdot 2\pi\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.



2. Anmerkung

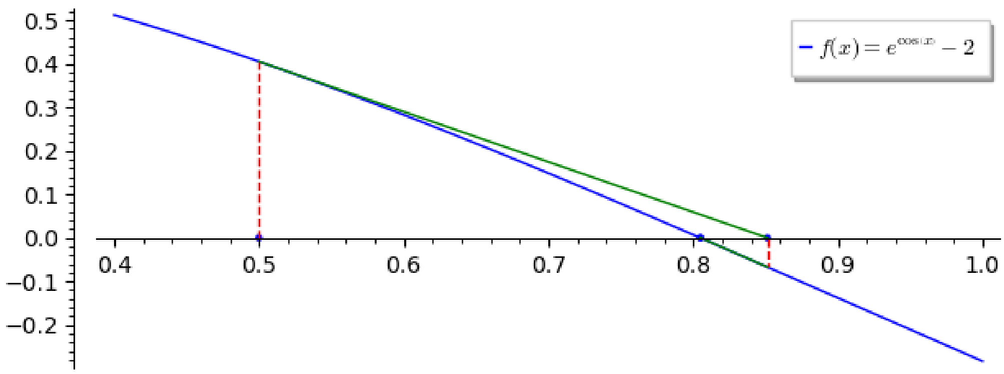
Abweichungen beim Rechnen sind möglich, abhängig von wieviele Nachkommastellen Sie rechnen.

Abweichungen sind nicht, solange Sie ausreichend viele Nachkommastellen benutzen!

1. Lösung

   Anmerkung: wegen unterschiedlicher Abrundungsmethoden, kleine Abweichungen zwischen Ihrer und den unten stehenden numerischen Werte sind möglich. Das Endergebnis soll trotzdem äquivalent sein.

```
Iteration 0: x_0 = 0.50000000,   f(x_0) = 0.40507855,
   f'(x_0) = -1.1530561,    f''(x_0) = -1.5578505,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -0.47463980
Iteration 1: x_1 = 0.85130863,   f(x_1) = -0.067142580,
   f'(x_1) = -1.4537860,    f''(x_1) = -0.18029635,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.0057277490
Iteration 2: x_2 = 0.80512399,   f(x_2) = -0.00025063567,
   f'(x_2) = -1.4416525,    f''(x_2) = -0.34655886,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.000041792536
Iteration 3: x_3 = 0.80495013,   f(x_3) = -3.7252903e-9,
   f'(x_3) = -1.4415922,    f''(x_3) = -0.34720038,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 6.2237980e-10
0.547286302760541
```

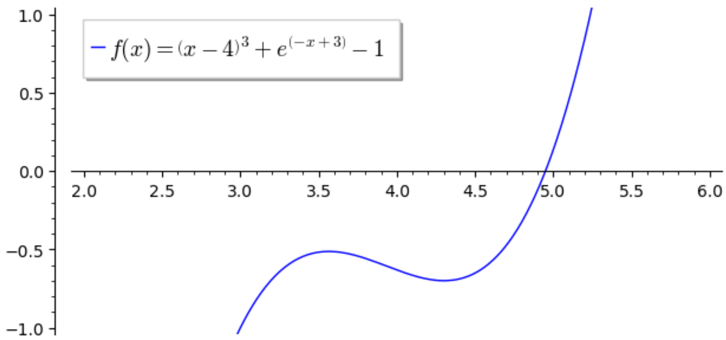


- $x^* = x_3 = 0.804950$ mit $f(x_3) = -5.24053 \cdot 10^{-9}$,
- Bei alle Iterationsschritte das Kovergenzkriterium ist erfüllt worden.
- Die Funktion ist periodisch mit Periode 2π und symmetrisch. Die (approximierten) Nullstellen sind der Form:

$$\{x^* + k \cdot 2\pi,\ k \in R; -x^* + k \cdot 2\pi,\ k \in R\}$$

4.2 AUFGABE

Der folgende ist der Graph der Funktion $(x-4)^3 + e^{-x+3} - 1$.

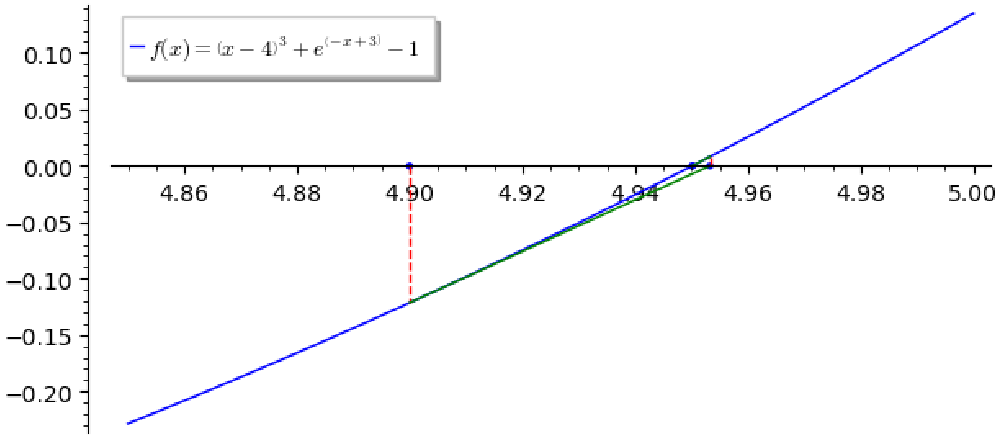


- Wählen Sie nach dem Konvergenzkriterium eine geeignete Anfangsstellen, um die Nullstelle zu bestimmen, mit Genauigkeit $|f(x^*)| < 0,000001$.
- Verifizieren Sie, ob das Konvergenzkriterium für jeden Iterationsschritt erfüllt wurde.

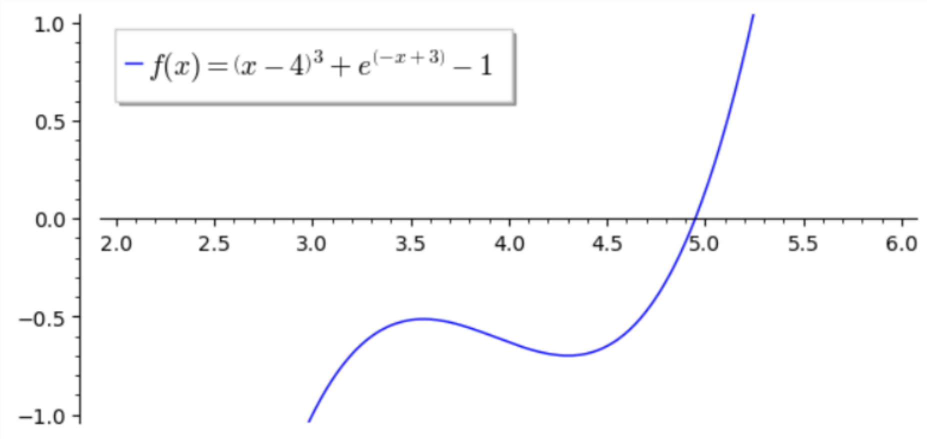
1. Lösung

   Wir wählen z.B. $x_0 = 4.9$

```
Iteration 0: x_0 = 4.9000000,   f(x_0) = -0.12143138,
   f'(x_0) = 2.2804314,     f''(x_0) = 5.5495686,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = -0.12958542
Iteration 1: x_1 = 4.9532493,   f(x_1) = 0.0080151488,
   f'(x_1) = 2.5842402,     f''(x_1) = 5.8613084,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.0070346162
Iteration 2: x_2 = 4.9501478,   f(x_2) = 0.000028161099,
   f'(x_2) = 2.5660892,     f''(x_2) = 5.8431396,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 0.000024989200
Iteration 3: x_3 = 4.9501368,   f(x_3) = 2.3283064e-10,
   f'(x_3) = 2.5660251,     f''(x_3) = 5.8430753,
   f(x_3)f''(x_3)/f'(x_3)^2 = 2.0661404e-10
-0.295510659005760
```



- $x^* = x_3 = 4.9501368$ mit $f(x_3) = 0,00000000$,
- Bei alle Iterationsschritte das Kovergenzkriterium ist erfüllt worden.



Anfangsstelle $x_0 = 4,9$ Genauigkeit $= 0,000001$

werde rechnen mit 7 bedeutenden Stellen

$f'(x) = 3\cdot(x-4)^2 - e^{-x+3}$

$f''(x) = 6\cdot(x-4) + e^{-x+3}$

$x_0 = 4,900000$

$f(x_0) = -0,1214318$

$f'(x_0) = 2,2804314$

$f''(x_0) = 5.5495686$

Konvergenzkriterium $\left|\frac{f(x_0)\cdot f''(x_0)}{f'(x_0)^2}\right| = 0,1295\ldots < 1$ erfüllt

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4,9 - \frac{(-0,1214318)}{2,2804314} = 4,9532493$

$f(x_1) = 0,0080151483$ $|f(x_1)| > 0,0000001$

2. Iteration

$f(x_1) = 0{,}0080151483$

$f'(x_1) = 2{,}5842402$

$f''(x_1) = 5{,}8613084$

Konvergenzkriterium...

$$\frac{0{,}0080151483 \cdot 5{,}8613084}{(2{,}5842402)^2} = 0{,}007\ldots < 1$$

$$x_2 = 4{,}9532493 - \frac{0{,}0080151483}{2{,}5842402} = 4{,}950147 8 \ldots$$

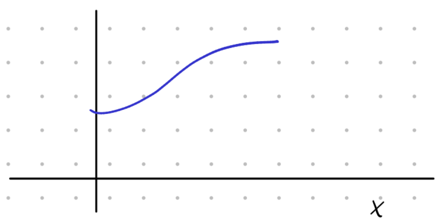
$f(x_2) = 0{,}000028161332$ Zu groß!

noch eine Iteration nötig

Interpretation der Formel

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x)}{f'(x_i)}$$

$y = f(x)$



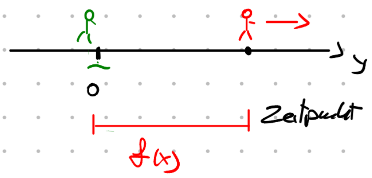
$f'(x)$

x Zeit

$f(x)$ Abstand

$f'(x)$ Geschwindigkeit

Vergangenheit



1-dimen.

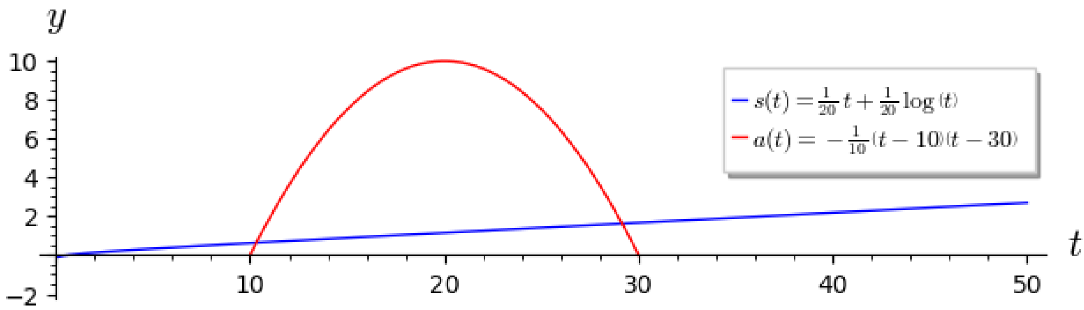
$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x)}$$

geschätzte Zeitpunkt in der Vergangenheit

4.3 AUFGABE

Das folgende Bild stellt die Graphen der Funktionen "Gelaufene Strecke" (in Meter) bzgl. Zeit (in Sekunden) von Achilles $a(t) = -\frac{1}{10}(x-10)(x-30)$ und von der Schildkröte $s(t) = \frac{1}{20}(x+\ln(x))$ dar. Die Schildkröte fängt am Zeitpunkt $t = 0$ zu "laufen", Achilles am Zeitpunkt $t = 10$.

- Bestimmen Sie einen Zeitpunkt, an dem Achilles die Schildkröte in einem Umgebung von $0,1$ mm erreicht. (Wir machen hier die fragwürdige Annahme, dass beide Achilles und die Schildkröte Punktformig sind).



1. Lösung

   Wir suchen eine Nullstelle t^* für die Differenzfunktion $f(t) = a(t) - s(t)$ so dass $|f(t^*) < 0,0001$.

   Wir wähelen z.B. als Anfangszeit $t_0 = 10$:

```
Iteration 0: x_0 = 10.000000,   f(x_0) = 0.61512925,
   f'(x_0) = -1.9450000,    f''(x_0) = 0.19950000,
   f(x_0)f''(x_0)/f'(x_0)^2 = 0.032439195
Iteration 1: x_1 = 10.316262,   f(x_1) = 0.0099776620,
   f'(x_1) = -1.8819009,    f''(x_1) = 0.19953019,
   f(x_1)f''(x_1)/f'(x_1)^2 = 0.00056213922
Iteration 2: x_2 = 10.321564,   f(x_2) = 2.8023496e-6,
   f'(x_2) = -1.8808430,    f''(x_2) = 0.19953067,
   f(x_2)f''(x_2)/f'(x_2)^2 = 1.5806178e-7
```

   - $y^* = t_2 = 10,321564$ mit $f(t_2) = 2,8023496 \cdot 10^{-6}$