2

POLYNOMFUNTKIONEN HÖHERER ORDNUNG UND HORNER-SCHEMA

2.1 AUFGABE

Gegeben sei (in Hauptform) das folgende Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$p(x) = 3x^5 - 33x^4 + 141x^3 - 291x^2 + 288x - 108$$

- Verifizieren Sie, dass {2, 3} Nullstellen sind
- Bestimmen Sie, mithilfe des Horner-Schemas, die entsprechende Produktform

Verifizierung der Nullstellen:

$p(2) = 3 \cdot 2^5 - 33 \cdot 2^4 + 141 \cdot 2^3 - 291 \cdot 2^2 + 288 \cdot 2 - 108$

$= 3 \cdot 32 - 33 \cdot 16 + 141 \cdot 8 - 291 \cdot 4 + 288 \cdot 2 - 108 = 0$

$p(3) = 3 \cdot 3^5 - 33 \cdot 3^4 + 141 \cdot 3^3 - 291 \cdot 3^2 + 288 \cdot 3 - 108$

$= 3 \cdot 243 - 33 \cdot 81 + 141 \cdot 27 - 291 \cdot 9 + 288 \cdot 3 - 108 = 0$

Horner Schema:

Zunächst, um die Berechnung zu erleichtern, vereinfachen wir $p(x)$:

$p(x) = 3 \cdot (x^5 - 11 \cdot x^4 + 47x^3 - 97x^2 + 96x - 36)$

	1	-11	47	-97	96	-36
2	0	2	-18	58	-78	36
	1	-9	29	-39	18	0 ✓

	1	-9	29	-39	18	
2	0	2	-14	30	-18	
	1	-7	15	-9	0	✓
3	0	3	-12	9		
	1	-4	3	0		✓
3	0	3	-3			
	1	-1	0			✓
1	0	1				
	1	0	✓			

Zusammenfassung: 2 ist eine doppelte NST
3 ist eine doppelte NST
1 ist eine einfache NST

Also, $p(x) = 3 \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^2$

2.2 AUFGABE

Gegeben sei (in Hauptform) das folgende Polynom:

$$p(x) = x^6 - 2x^5 - 12x^4 + 14x^3 + 47x^2 - 12x - 36$$

Mit der Gewissheit, alle Nullstellen seien ganzzahlig, bestimmen Sie, mithilfe des Horner-Schemas, die entsprechende Produktform.

Kandidatnullstellen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \underbrace{\pm 12, \pm 18, \pm 36}_{\text{(eher unwahrscheinlich)}}$

"Experimentelle" Versuch nach NST:

$P(1) = 1 - 2 - 12 + 14 + 47 - 12 - 36 = 0$. 1 ist eine NST.

$P(-1) = 1 + 2 - 12 - 14 + 47 + 12 - 36 = 0$. −1 ist eine NST.

$P(2) = 64 - 64 - 12 \cdot 16 + 14 \cdot 8 + 47 \cdot 4 - 24 - 36 = 48$

2 ist keine NST

$P(-2) = 64 + 64 - 12 \cdot 16 - 14 \cdot 8 + 47 \cdot 4 + 24 - 36 = 0$

−2 ist eine NST

Wir haben 3 NST gefunden, das ist schon mehr als ausreichend, um mit dem Horner Schema anzufangen.

Horner Schema:

	1	-2	-12	14	47	-12	-36
1	0	1	-1	-13	1	48	36
	1	-1	-13	1	48	36	$\underline{\underline{0}}$ ✓
-1	0	-1	2	11	-12	-36	
	1	-2	-11	12	36	$\underline{\underline{0}}$	
-2	0	-2	8	6	-36		
	1	-4	-3	18	$\underline{\underline{0}}$		
3							
	1	-1	-6	$\underline{\underline{0}}$			

an dieser Stelle mögliche Kandidaten sind noch ±1, -2, ±3, ±6, ...

Was sollen wir an dieser Stelle tun? Mögliche Kandidaten sind noch ±1, -2, ±3, ±6. Alternative

Horner Schema | Quadratische Gleichung

Horner Schema

Versuch mit 1

	1	-1	-6
1	0	1	0
	1	0	-6

! kein Erfolg!

Versuch mit -2

	1	-1	-6
-2	0	-2	6
	1	-3	0 ✓
3	0	3	
	1	0	✓

-2 ist doppelte NST

3 ist eine doppelte NST

Quadratische Gleichung

1 -1 -6 im Horner Schema entspricht

$$x^2 - x - 6$$

die zwei NST sind

$$x_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1\pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

Zusammenfassung:

1 ist eine einfache NST
-1 ist eine einfache NST
-2 ist eine doppelte NST
3 ist eine doppelte NST

$$P(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)^2\cdot(x-3)^2.$$

2.3 AUFGABE

Gegeben sei (in Hauptform) das folgende Polynom:

$$p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 12x - 6$$

- Das Polynom hat ganzzahligen Koeffizienten. Folgt daraus, dass alle Nullstellen ganzzahlig sein müssen?
- Verifizieren Sie dass -1 eine Nullstelle ist
- Bestimmen Sie, mithilfe des Horner-Schemas, die entsprechende Produktform

•) Antwort: nicht unbedingt.

•) $P(-1) = 2 - 4 - 4 + 12 - 6 = 0$

•) Horner Schema

	2	4	-4	-12	-6
-1	0	-2	-2	6	6
	2	2	-6	-6	0
2	0	4	12	-12	
	2	6	-6	-18 !	

2 ist keine NST
Wiederholung mit -2!

	2	2	-6	-6
-2	0	-4	4	4
	2	-2	-2	-2 !

geht nicht. Versuch mit -1:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 2 & -6 & -6 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ \hline & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

-1 ist NST.

Quadratische Formel: NST von $2x^2 + 0 \cdot x - 6$

$$= \frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4 \cdot 6 \cdot 2}}{4} = \pm\sqrt{3}$$

es folgt: $2x^2 - 6 = 2 \cdot (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3})$

Zusammenfassung:

-1 ist eine doppelte NST

$\sqrt{3}$ ist eine einfache NST

$-\sqrt{3}$ ist eine einfache NST.

$$p(x) = 2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3})$$

Bemerkung:

Nicht alle Nullstellen sind ganzzahlig.

2.4 AUFGABE

Prüfen Sie mithilfe des Horner Schemas wie oft $x = 3$ und $x = -5$ eine Nullstelle von $f(x) = x^9 + x^8 - 60x^7 + 20x^6 + 1310x^5 - 1938x^4 - 10188x^3 + 25380x^2 + 2025x - 30375$ ist. Schreiben Sie die Funktion in ihrer Produktform auf.

	1	1	−60	120	1310	−1938	−10188	25380	2025	−30375
3	0	3	12	−144	−372	2814	2628	−22680	8100	30375
	1	4	−48	−124	938	876	−7560	2700	10125	0
3	0	3	21	−81	−615	969	5535	−6075	−10125	
	1	7	−27	−205	323	1845	−2025	−3375	0	
3	0	3	30	9	−588	−795	3150	3375		
	1	10	3	−196	−265	1050	1125	0		
3	0	3	39	126	−210	−1425	−1125			
	1	13	42	−70	−475	−375	0			
3	0	3	48	270	600	375				
	1	16	90	200	$\boxed{125}$	0				
−5	0	−5	−55	−175	−125					
	1	11	35	25	0					
−5	0	−5	−30	−25						
	1	6	5	0						
−5	0	−5	−5							
	1	1	0							

125 ist nicht durch 3 teilbar ⇒ kein weiterer Schritt mehr sinnvoll

⇒ 3 ist 5-fache Nst

⇒ −5 ist 3-fache Nst

$\underbrace{1 \quad 1}$ ≙ $x+1$ ⇒ $x = -1$ ist 1-fache Nst

$\Rightarrow f(x) = (x-3)^5 (x+5)^3 (x+1)$

2.5 AUFGABE: (VORSCHAU GEBROCHENRATIONALER FUNKTIONEN)

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^4 - 16x^3 + 46x^2 - 56x + 24}{x^2 - 5x + 6}$$

1. Zerlegen Sie Nenner und Zähler in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Können Sie den Graph der Funktion skizzieren?

1) $p(x) = 2 \cdot (x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12)$

suche eine NST durch Erratung: $p(1) =$

$= 1 - 8 + 23 - 28 + 12 = 0$!

	1	-8	23	-28	12
1	0	1	-7	16	-12
	1	-7	16	-12	0
2	0	2	-10	12	
	1	-5	6	0	

$x^2 - 5x + 6$ NST $= \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Zufälligerweise gleich!

1 einf. NST, 2 doppelte NST, 3 einf. NST.

$p(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3).$

$q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2) \cdot (x-3)$

Definitionslücke von $f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ sind die NST von $q(x)$, also 2 und 3.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

$f(x) = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)}{(x-2) \cdot (x-3)}$

$f^*(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-2)$

NST von $f(x) = \{1\}$. 2 und 3 sind keine NST von $f(x)$, da dort $f(x)$ nicht definiert ist.

NST von $f^*(x) = \{1, 2, 3\}$.

Der Graph von $f^*(x)$ ist eine Parabel.

Der Graph von $f(x)$ ist eine Parabel ohne zwei Punkte.