2

POLYNOMFUNTKIONEN HÖHERER ORDNUNG UND HORNER-SCHEMA

2.1 AUFGABE

Sei $p(x) = 4x^3 - 16x^2 - 16x + 64$

- Verifizieren Sie, dass $\{2, -2, -1, 4\}$ Nullstellen sind
- Bestimmen Sie die Produktform von $p(x)$

2.1

Bemerkung: $p(x)$ vom Grade 3, max. 3 Nullstellen vorhanden.

Verifizierung. $p(2) = 4 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 64$
$= 4 \cdot 8 - 64 - 32 + 64 = 0$ ✓

$p(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 16 \cdot (-2)^2 - 16 \cdot (-2) + 64 = 0$ ✓

$p(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 16 \cdot (-1)^2 - 16 \cdot (-1) + 64 = 60$ ✗

$p(4) = 0$ ✓

3 NST: $\{2, -2, 4\}$

Produktform $p(x) = 4 \cdot (x-2) \cdot (x+2) \cdot (x-4)$

Hauptform $p(x) = 4x^3 - 16x^2 - 16x + 64$

$a = 4$

2.2 AUFGABE

Gegeben seien (in Hauptform) die folgende zwei Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$p(x) = 3x^3 - 9x^2 + 12; \; q(x) = 3x^3 - 9x - 6$$

- Bestimmen Sie, durch Erraten, die Nullstelle von $p(x)$ und $q(x)$
- Bestimmen Sie, mithilfe des Horner-Schemas, die entsprechende Produktformen

2.2

$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ allgemeines Polynom vom Grade 3

$a_3 = 3$ $a_1 = 0$

$a_2 = -9$ $a_0 = 12$

Hoffnung (aber keine Garantie), dass alle NST ganzzahlig sind.

Falls NST ganzzahlig, dann teilen sie $a_0 = 12$.

$p(x) = 3 \cdot (x^3 - 3x^2 + 4)$. Probieren wir Teiler von 4

$\{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$

$p(1) = 6$

$p(2) = 0$ ✓ 2 NST, $p(x) =$ entweder a) $3 \cdot (x-2) \cdot (x-2) \cdot (x+1)$

$p(4) = 60$ oder b) $3(x-2) \cancel{\cdot (x+1)} \cdot (x+1)$

$p(-1) = 0$ ✓

$p(-2) = -48$

$p(-4) = -324$

a) $3 \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot (x+1)$

$= 3 \cdot (x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4)$

$= 3(x^3 - 3x^2 + 4) = 3x^3 - 9x^2 + 12$

✓

Wieder das Gleiche, jetzt mit Horner Schema

$p(x) = 3(x^3 - 3x^2 + 4)$

Faktorisiere $x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)\cdot(x^2 - 4x + 4)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ \boxed{-1} & 0 & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \underline{\underline{0}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & -1 & 5 \\ \hline & 1 & -5 & \underline{\underline{9}} \neq \end{array}\right.$$

d.h. -1 ist keine NST von $x^2 - 4x + 4$)

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & \underline{0} \end{array}$$

$(x^2 - 4x + 4) = (x-2)\cdot(x-2)$

Zusammenfassung

-1 einfache NST von $p(x)$

2 doppelte NST von $p(x)$

$p(x) = 3\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)$

$q(x) = 3\cdot(x^3 - 3x - 2)$

Potentielle ganzzahlige NST $\{1, 2, -1, -2\}$

$q(1) = -4$

$q(-1) = 0$ ✓

$q(2) = 0$ ✓

$q(-2) = -4$

Horner Schema

	1	0	−3	−2
−1	0	−1	1	2
	1	−1	−2	0
−1	0	−1	2	
	1	−2	0	

es folgt, dass −1 ist eine doppelte NST von $q(x)$

$$q(x) = 3\cdot(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$$

2 ist eine einfache NST von $q(x)$.

2.3 AUFGABE

Bestimmen Sie mithilfe des Horner-Schemas die Produktform für folgendes Polynom

$$4x^5 + 12x^4 - 4x^3 - 28x^2 + 16$$

(2.3

$p(x) = 4x^5 + 12x^4 - 4x^3 - 28x^2 + 16$
$= 4\cdot(x^5 + 3x^4 - x^3 - 7x^2 + 4)$

Mögliche ganzzahlige NSTen $\{1, 2, 4, -1, -2, -4\}$

$p(1) = 0$.

	1	3	-1	-7	0	4
1	0	1	4	3	-4	-4
	1	4	3	-4	-4	0
1	0	1	5	8	4	
	1	5	8	4	0	
1	0	1	6	14		
	1	6	14	18		

1 ist eine doppelte NST

	1	5	8	4
-1	0	-1	-4	-4
	1	4	4	0

entspricht $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Zusammenfassung: 1 ist eine doppelte NST
-1 ist eine einfache NST
-2 ist eine doppelte NST

$p(x) = 4\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x+2)^2$

Verifizierung $4(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x^2+4x+4) = 4(x-1)^2\cdot(x^3+4x^2+4+x^2+4x+4)$
$= \dots\dots$

2.4 AUFGABE

Faktorisieren Sie die Funktion $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ vollständig:

Mögliche ganzzahlige NST: $\{1, 3, -1, -3\}$

2,5

⇒ Horner-Schema anwenden!

	1	1	-6	2	5	-3
1	0	1	2	-4	-2	3
	1	2	-4	-2	3	0
-1	0	-1	-1	5	-3	
	1	1	-5	3	0	
-3	0	-3	6	-3		
	1	-2	1	0		

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)(x+1)(x+3)(x^2 - 2x + 1)$$

$x = 1$ $x = 1$ (binom. Formel $(x-1)^2$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^3(x+1)(x+3)$$

2.5 AUFGABE: (VORSCHAU GEBROCHENRATIONALER FUNKTIONEN)

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^3 - 9x^2 + 12}{3x^2 - 3x - 6}$$

1. Zerlegen Sie Nenner und Zähler in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Können Sie den Graphen der Funktion skizzieren?

2.5

$q(x) = 3\cdot(x^2 - x - 2)$ p-q - Formel

$= 3\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ $q(-1)=0$ $q(2)=0$

$p(x) = 3\cdot(x^3 - 3x^2 + 4) = 3\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-2)$

$f(x) = \frac{\cancel{3}\cdot(x+1)\cdot(x-2)^2}{\cancel{3}(x+1)\cdot(x-2)} \overset{?}{=} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-2)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-2)}}$

Vorsicht!

Dürfen wir?

Definitionsbereich von $f(x)$ = { alle reelle Zahlen ausser -1 und 2 ! }

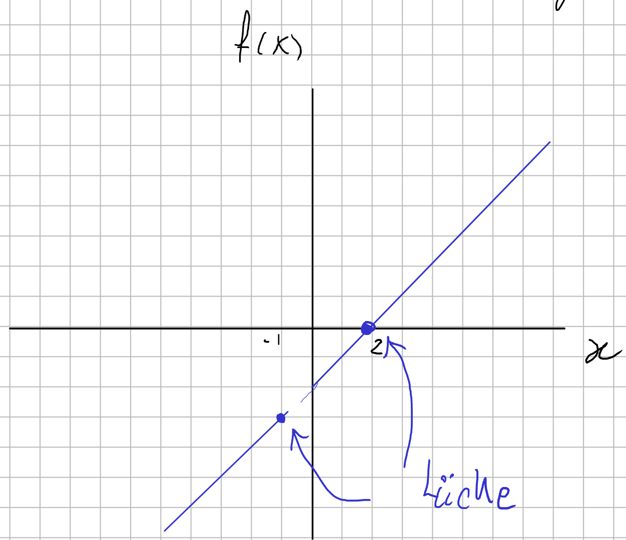
$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

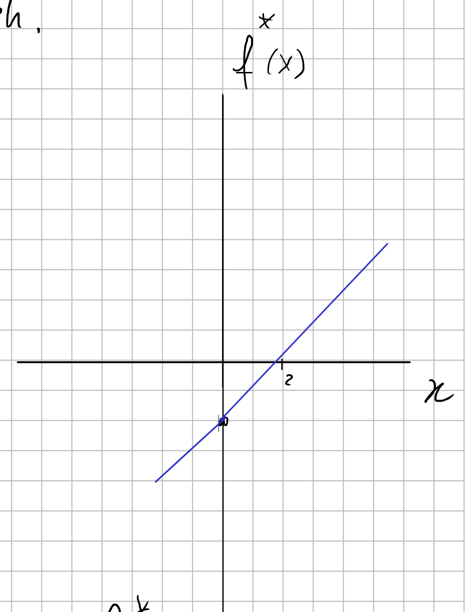
Nachdem wir vereinfachen $(X-2)$

Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

$f^{*}(X) = (X-2)$

Verwandt zu $f(x)$, aber nicht ganz gleich.





$f(x)$ besitzt keine Nullstelle, da $f(x)$ an der Stelle $x=2$ nicht definiert ist!

$f^{*}(x)$ besitzt $X=2$ als NST.