3

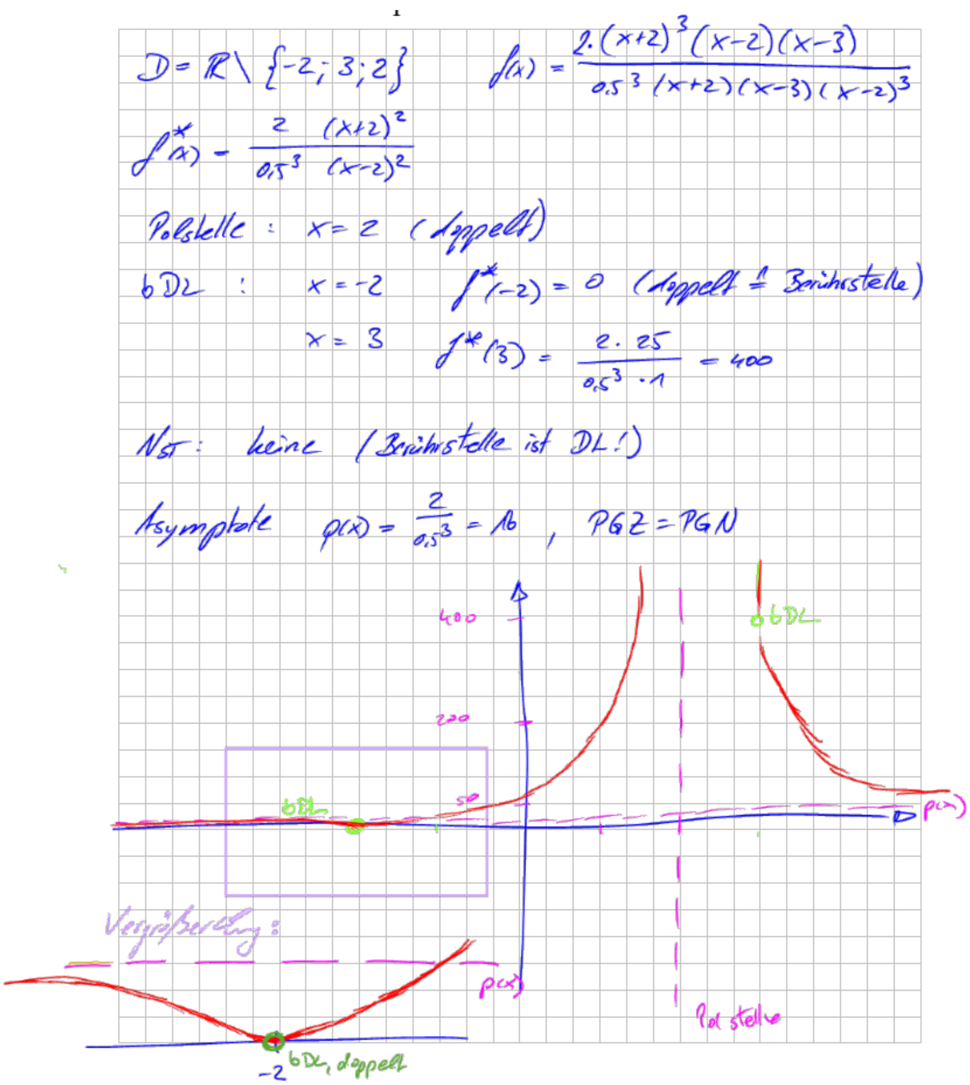
GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN

3.1 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+2)^3(2x-4)(x-3)}{(x+2)(x-3)(0.5x-1)^3}$$

- Geben Sie Nullstellen, behebbare DL, Polstellen und die Asymptote der Funktion an. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.



3.2 AUFGABE

- Faktorisieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^5 - 24x^3 - 4x^2 + 54x + 36}{0.5x^5 - x^4 - 3.5x^3 + 10x^2 - 6x}$$

- Zähler: $2(x^5 - 12x^3 - 2x^2 + 27x + 18)$

TR (Wertetabelle) $x = -3$ $x = -1$ $x = 2$ $x = 3$ = Nst

→ Horner-Schema x^4 fehlt ⇒ 0 ergänzen!!

	1	0	−12	−2	27	18
2	0	2	4	−16	−36	−18
	1	2	−8	−18	−9	0
3	0	3	15	21	9	
	1	5	7	3	0	
−1	0	−1	−4	−3		
	1	4	3	0		
−3	0	−3	−3			
	1	1				

$\Rightarrow z(x) = 2(x-2)(x-3)(x+1)^2(x+3)$

- Nenner: $0{,}5x^5 - x^4 - 3{,}5x^3 + 10x^2 - 6x$

$= 0{,}5x(x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12)$

TR: $x = -3$ $x = 1$ $x = 2$

Horner-Schema

	1	−2	−7	20	−12
1	0	1	−1	−8	12
	1	−1	−8	12	0
2	0	2	2	−12	
	1	1	−6	0	
−3	0	−3	6		
	1	−2	0		

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\cdot(x-2)(x-3)(x+1)^2(x+3)}{0{,}5x\,(x-1)(x-2)^2(x+3)}$$

- Geben Sie Nullstellen, behebbare DL, Polstellen und die Asymptote der Funktion $f(x)$ an. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2; -3\}$

$$f^*(x) = \frac{2 \cdot (x-3)(x+1)^2}{0{,}5x(x-1)(x-2)}$$

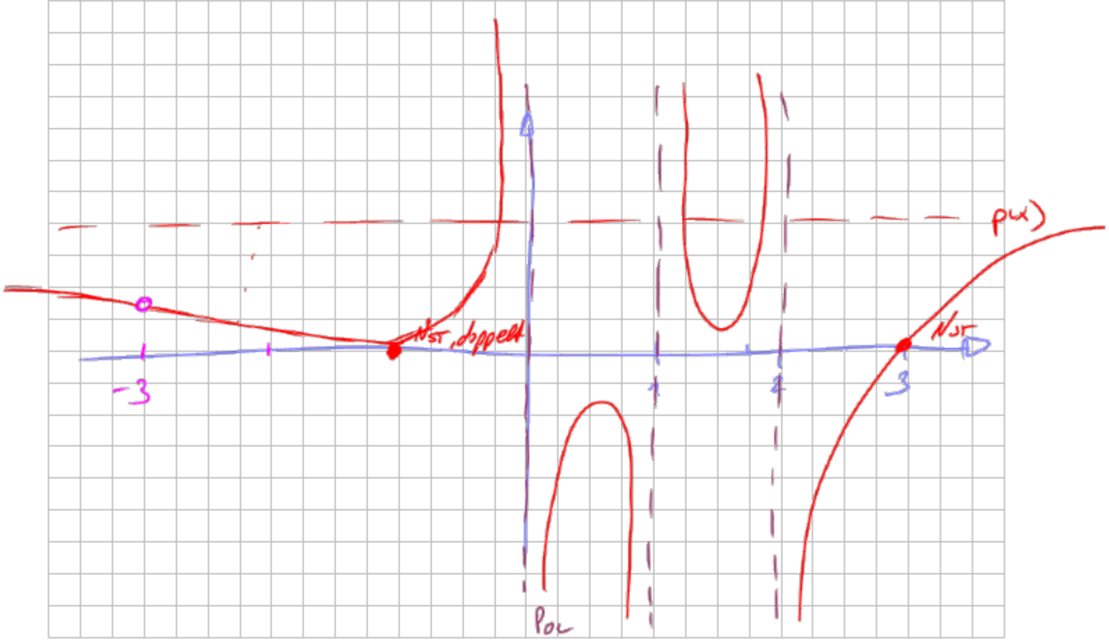
Polstellen: $x = 0$ $x = 1$ $x = 2$ je einfach

b DL: $x = -3$

$$y = f^*(-3) = \frac{2 \cdot (-6)(-2)^2}{0{,}5(-3)(-4)(-5)} = \frac{-48}{-30} = 1{,}6$$

NST: $x = -1$ (doppelt)
$x = 3$ (einfach)

Asymptote: PGZ = PGN $\Rightarrow$ $p(x) = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{0{,}5} = 4$



3.3 AUFGABE

- Faktorisieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^6 - 24x^4 + 144x^2 - 256}{2x^5 - 6x^4 - 38x^3 + 102x^2 + 180x - 432}$$

Zähler faktorisieren: TR/Wertetabelle $x_1 = -2$ $x_2 = 2$ $x_3 = -4$ $x_4 = 4$

→ Horner-Schema:

	1	0	-24	0	144	0	-256
2	0	2	4	-40	-80	128	256
	1	2	-20	-40	64	128	0
-2	0	-2	0	40	0	-128	
	1	0	-20	0	64	0	
4	0	4	16	-16	-64		
	1	4	-4	-16	0		
-4	0	-4	0	16			
	1	0	-4	0			

↳ $x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$Z(x) = (x-2)^2(x+2)^2(x-4)(x+4)$

Nenner faktorisieren: $n(x) = 2x^5 - 6x^4 - 38x^3 + 102x^2 + 180x - 432$

TR/Wertetabelle: $x_1 = 2$ $x_2 = 3$ $x_3 = 4$ $x_4 = -3$

→ Horner-Schema

	2	-6	-38	102	180	-432
2	0	4	-4	-84	36	432
	2	-2	-42	18	216	0
3	0	6	12	-90	-216	
	2	4	-30	-72	0	
4	0	8	48	72		
	2	12	18	0		
-3	0	-6	-18			
	2	6	0			

↳ $2x + 6 = 2(x+3)$

$n(x) = 2(x-2)(x-3)(x-4)(x+3)^2$

- Geben Sie für f(x) die Polstellen, behebbaren Definitionslücken und die Nullstellen an. Welche der nachfolgenden Funktionen könnte die Asymptote sein? (Begründung?)
  - $p(x) = 1$
  - $p(x) = 1/2$
  - $p(x) = 0.5x + 1.5$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2(x+2)^2(x-4)(x+4)}{2\,(x-2)(x-3)(x-4)(x+3)^2}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3; 4; -3\}$$

$$f^*(x) = \frac{(x-2)(x+2)^2(x+4)}{2\cdot(x-3)(x+3)^2}$$

Polstellen: $x = 3$ einfach

$x = -3$ doppelt

behebb. DL: $x = 2$ $\quad f^*(2) = 0$

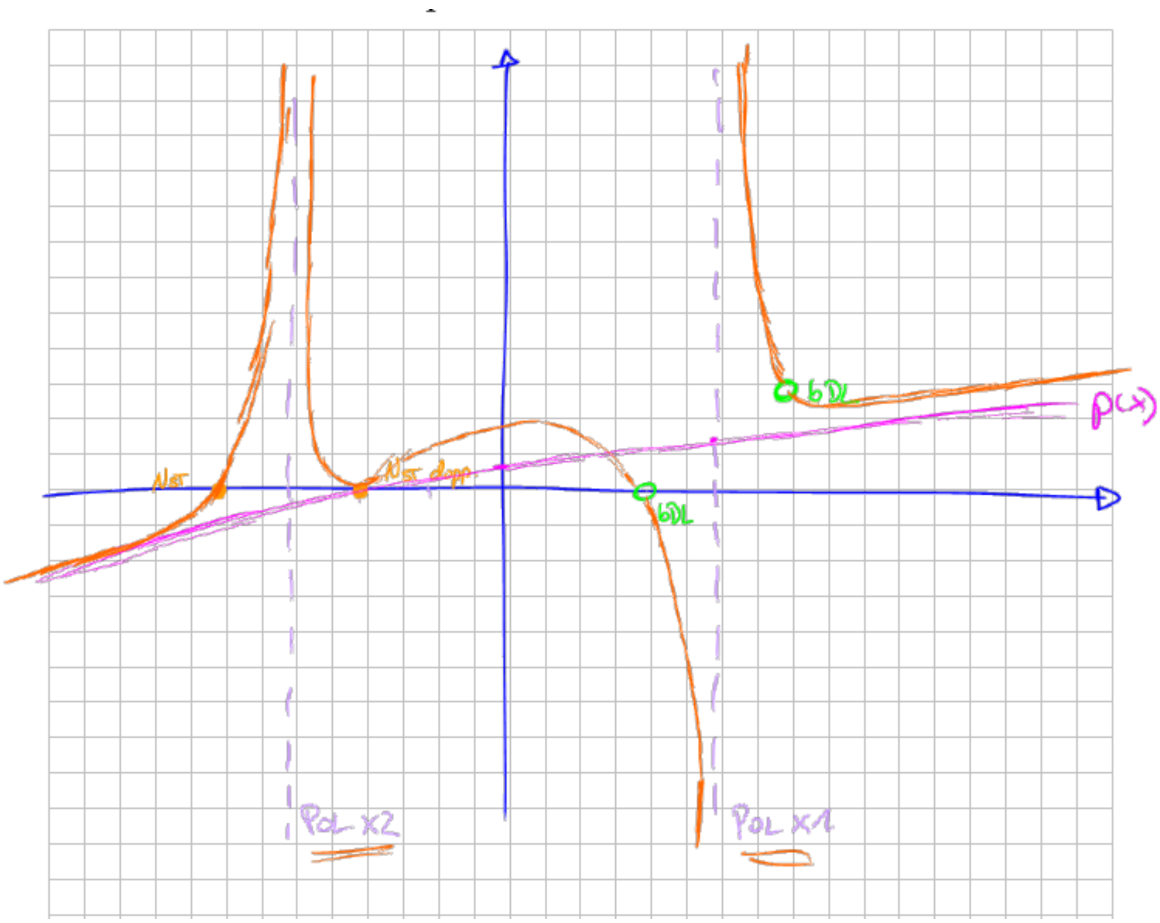
$x = 4$ $\quad f^*(4) = \frac{2\cdot 36\cdot 8}{2\cdot 1\cdot 49} = 5{,}9$

NST: $x = -2$ doppelt $\quad x = -4$ einfach

$p(x) = 0{,}5x + 1{,}5$, da PGZ = PGN $\underline{\underline{+1}}$

$p(x)$ hat PG = 1,
ist also linear ($y = mx + c$)

- Skizzieren Sie den Graphen:



3.4 AUFGABE

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)^4}{5\left(x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30\right)}$$

1. Zerlegen Sie den Nenner in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Skizzieren Sie den Graph
4. Wie würden Sie das asymptotische Verhalten der Funktion beschreiben?

1. Lösung

Nenner $q(x) = 5\cdot(x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30)$

Horner Schema

$q(-1) = 0$, $q(-2) = 0$. Fange mit -1 an:

	1	-5	-4	29	30
-1	0	-1	6	1	-30
	1	-6	-1	30	0

-2	0	-2	16	-30
	1	-8	15	0

P-q Formel $x^2 - 8x + 15 = (x-3)\cdot(x-5)$

Es folgt: $q(x) = 5\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$

a) Zerlegung:

Zähler: Ops! Der Zähler wurde schon in faktorisierten Form gegeben!

Nenner: (Wie in einer früheren Aufgabe): $q(x) = 5(x+1)(x+2)(x-3)(x-5)$

b) Definitionslücken usw.:

Definitionslücken: $\{-2, -1, 3, 5\}$; DefinitionsBereich: $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3, 5\}$; Zählernullstellen: $\{-1, 1, 2, 3\}$; Behebbare Definitionslücken: $\{-1, 3\}$; Funktionennullstellen: $\{1, 2\}$.

c) Lücken und Polstellen:

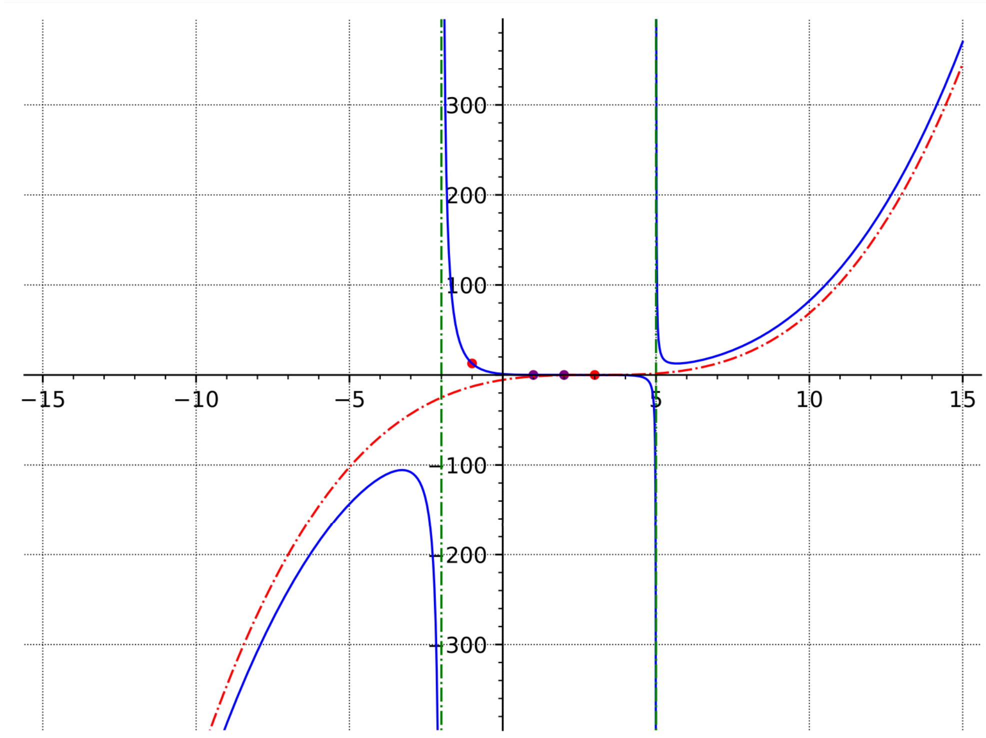
Lücken: $\{(-1, 64/5); (3, 0)\}$; Polstellen bei $x = -2$ und $x = 5\}$

d) Asymptoten:

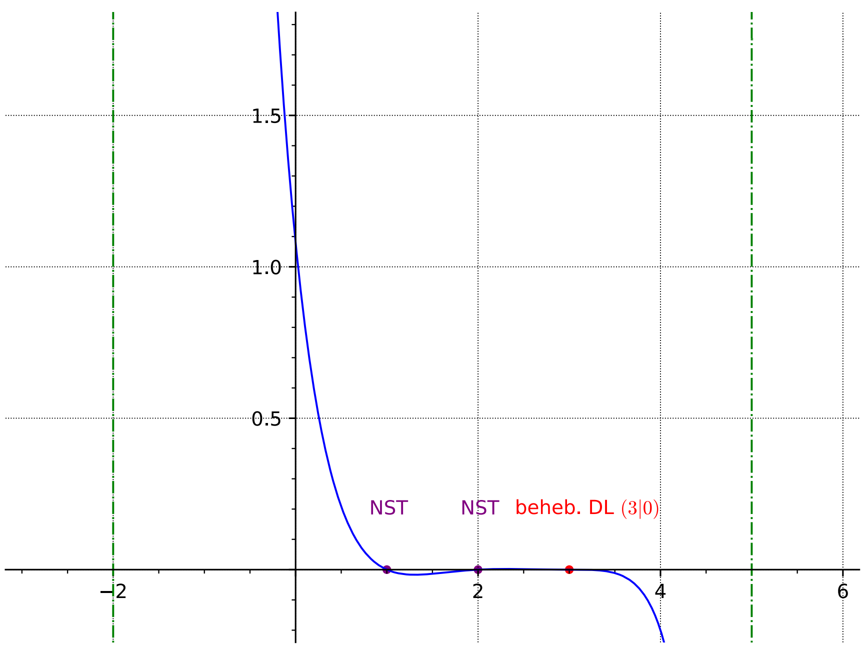
Senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 5$;

Es sind weder waagerechte noch schiefe Asymptoten vorhanden, da die Differenz zwischen den Polynomgraden von $p(x)$ und $q(x)$ 3 ist. **Anmerkung:** man erkennt, dass das Verhalten der Funktion als sich x von den zwei Polstellen entfernt, qualitativ ähnlich zu dem einer kubischen Funktion ist. Im Bild wird ebenso den Graphen der Funktion $(x-3)^3$ dargestellt.

e) Graph:



Detail im Bereich $[-3, 6]$:



3.5 AUFGABE

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{2\left(x^5 - 4\,x^4 - 21\,x^3 + 104\,x^2 - 80\,x\right)}{9\left(x^4 - 3\,x^3 - 9\,x^2 + 23\,x - 12\right)}$$

1. Zerlegen Sie Nenner und Zähler in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Unterscheiden Sie zwischen behebbaren DL (Löcher) und nicht behebbaren DL (Polstellen)
4. Geben Sie Gleichungen für eventuelle senkrechte oder waagerechte Asymptoten
5. Welche der nachfolgenden Gleichungen könnte noch eine Asymptote beschreiben? (Begründung?)
   a) $y = \frac{2}{9}$
   b) $y = 0$
   c) $y = -\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}$
   d) $y = \frac{2}{9} + x$
6. Skizzieren Sie den Graph

Tipp: 4 ist eine Nullstelle von $p(x)$ sowie von $q(x)$.

1. Lösung
   a) Zerlegung:

      Zähler: $p(x) = -2 \cdot x \cdot (x^4 - 4x^3 + 21x^2 - 104x - 80)$. Da $x = (x-0)^1$ faktorisiert wurde, erkenn wir sofort dass $x = 0$ eine einfache Nullstelle ist. Da $p(x)$ ganzzahlige Koeffizienten besitzt, wir hoffen, dass die andere Nullstellen ganzzahlig und Teiler von 80 sind, d.h. Elemente aus $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10 \ldots\}$. Man verifiziert z.B., dass $p(1) = 0$, d.h. $(x-1)$ lässt sich faktorisieren nach dem Horner Schema:

	1	-4	-21	104	-80
1	0	1	-3	-24	-18
	1	-3	-24	80	0

Also, $p(x) = -2x(x-1)(x^3 - 3x^2 - 24x + 80)$. Man verifiziert, dass 4 ebenso eine Nullstelle ist .

	1	-3	-24	80	0
4	0	4	4	-80	
	1	1	-20	0	

Es folgt $p(x) = -2x(x-1)(x-4)(x^2 + x - 20)$. Nach Anwendung der p-q Formel folgt:

$$p(x) = -2x(x-1)(x-4)(x-4)(x-5) = -2x(x-1)(x-4)^2(x-5)$$

Nenner: $q(x) = 2 \cdot (x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 23x - 12)$. Da $q(x)$ ganzzahlige Koeffizienten besitzt, wir hoffen, dass die andere Nullstellen ganzzahlig und Teiler von 12 sind, d.h. Elemente aus $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$. Man verifiziert z.B., dass $p(1) = 0$, d.h. $(x-1)$ lässt sich faktorisieren nach dem Horner Schema:

	1	-3	-9	23	-12
1	0	1	-2	-11	12
	1	-2	-11	12	0

Also, $p(x) = 9(x-1)(x^3 - 2x^2 - 11x + 12)$. Man verifiziert, dass 4 ebenso eine Nullstelle ist .

	1	-2	-11	12	0
4	0	4	8	-12	
	1	2	-3	0	

Es folgt $p(x) = 9(x-1)(x-4)(x^2+2x-3)$. Nach Anwendung der p-q Formel folgt:

$$p(x) = 9(x-1)(x-4)(x-1)(x+3) = 9(x-1)^2(x-4)(x+3)$$

b) Definitionslücken usw.:

Definitionslücken: $\{-3, 1, 4\}$; DefinitionsBereich: $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 4\}$; Zählernullstellen: $\{1, 4, 5\}$; Behebbare Definitionslücke: $(4|0)$; Funktionennullstellen: $\{-5, 0\}$.

c) Lücken und Polstellen:

Behebbare Lücken: $\{(4, 0)\}$; Polstellen $\{1, -3\}$

d) Asymptoten:

Senkrechte Asymptoten: $x = 1;\ x = -3;$

Asymptote der Form $y = -\frac{2}{9}x + 2/9$. Begründung: Es ist die einzige vorgeschlagene Variante mit Steigung $-2/9$. Die Steigung erkennen wir aus den Koeffizienten von x^5 ind $p(x)$ (−2) und von x^4 in $q(x)$ (9).

e) Graph