3

GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN

Themen:

Gebrochenrationale Funktionen

- Definition einer gebrochenrationalen Funktion *[Pa1] §III.6.1*
- Nullstellen, Definitionslücken, Pole *[Pa1] §III.6.2*
- Asymptotisches Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion *[Pa1] §III.6.3*

3.1 AUFGABE

Stellen Sie Wertetabelle auf und skizzieren Sie die Graphen für folgende elementare Gebrochenrationale Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-3)^2}; \quad f_2(x) = \frac{1}{(x+3)}; \quad f_3(x) = \frac{x}{x-3}$$

$f_1(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

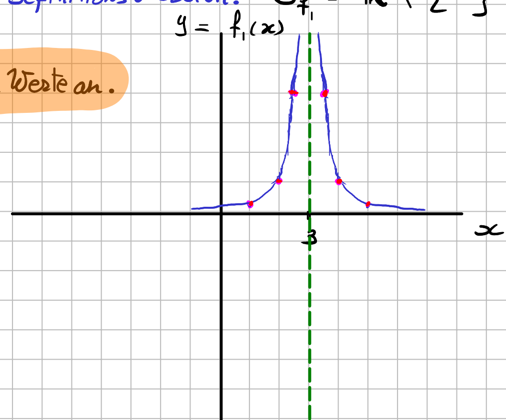
Definitionsbezeich: $D_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f_1(x)$ nimmt nur positive Werte an.

Senkrechte Asymptote bei $x = 3$ (Polstelle)

Horizontale Asymptote: x-Achse

$f_1(x)$ ist symmetrisch bzgl. der senkrechten Asymptote in $x=3$



x	$f_1(x)$
5	1/4
4	1
3,5	4
2,5	4
2	1
1	1/4

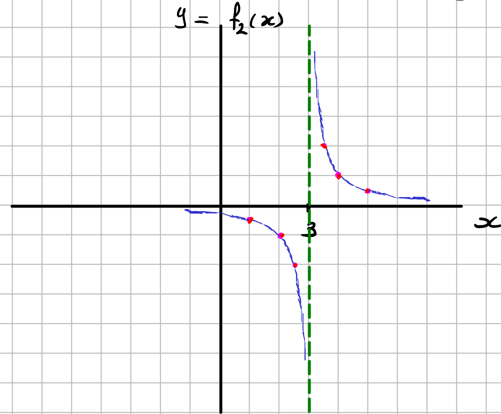
$f_1(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; $p(x) = 1$, $q(x) = (x-3)^2$

$q(x) = (x-3)^{m=2}$ m gerade

Kein Vorzeichenwechsel bei $x = 3$

$f_2(x) = \dfrac{1}{(x-3)}$

Definitionsbereich: $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$



x	$f_1(x)$
5	1/2
4	1
3,5	2
2,5	-2
2	-1
1	-1/2

Senkrechte Asymptote bei $x = 3$ (Polstelle)

Horizontale Asymptote: x-Achse

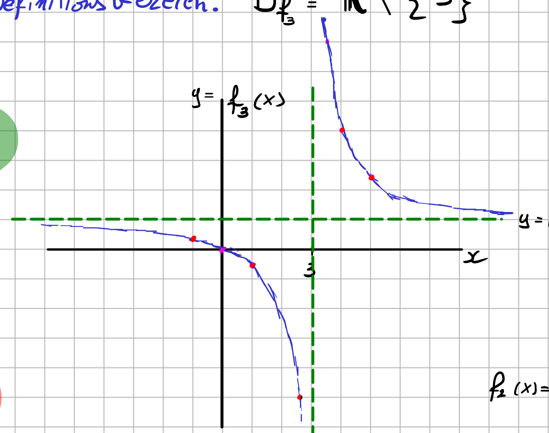
$f_1(x)$ ist antisymmetrisch bzgl. der senkrechten Asymptote in $x = 3$

$f_2(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; $p(x) = 1$, $q(x) = (x-3)$

$q(x) = (x-3)^{m=1}$ m ungerade Vorzeichenwechsel bei $x = 3$

$f_3(x) = \dfrac{x}{x-3}$

Definitionsbereich: $D_{f_3} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$



x	$f_3(x)$
5	2,5
4	4
3,5	7
2,5	-5
1	-0,5
0	0
-1	0,25
-2	0,4

Senkrechte Asymptote bei $x = 3$ (Polstelle)

Nullstelle bei $x = 0$

Grad von $p(x)$ = Grad von $q(x) = 1$

Horizontale Asymptote $y = 1$

$f_2(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; $p(x) = x$, $q(x) = (x-3)$

$q(x) = (x-3)^{m=1}$ m ungerade Vorzeichenwechsel bei $x = 3$

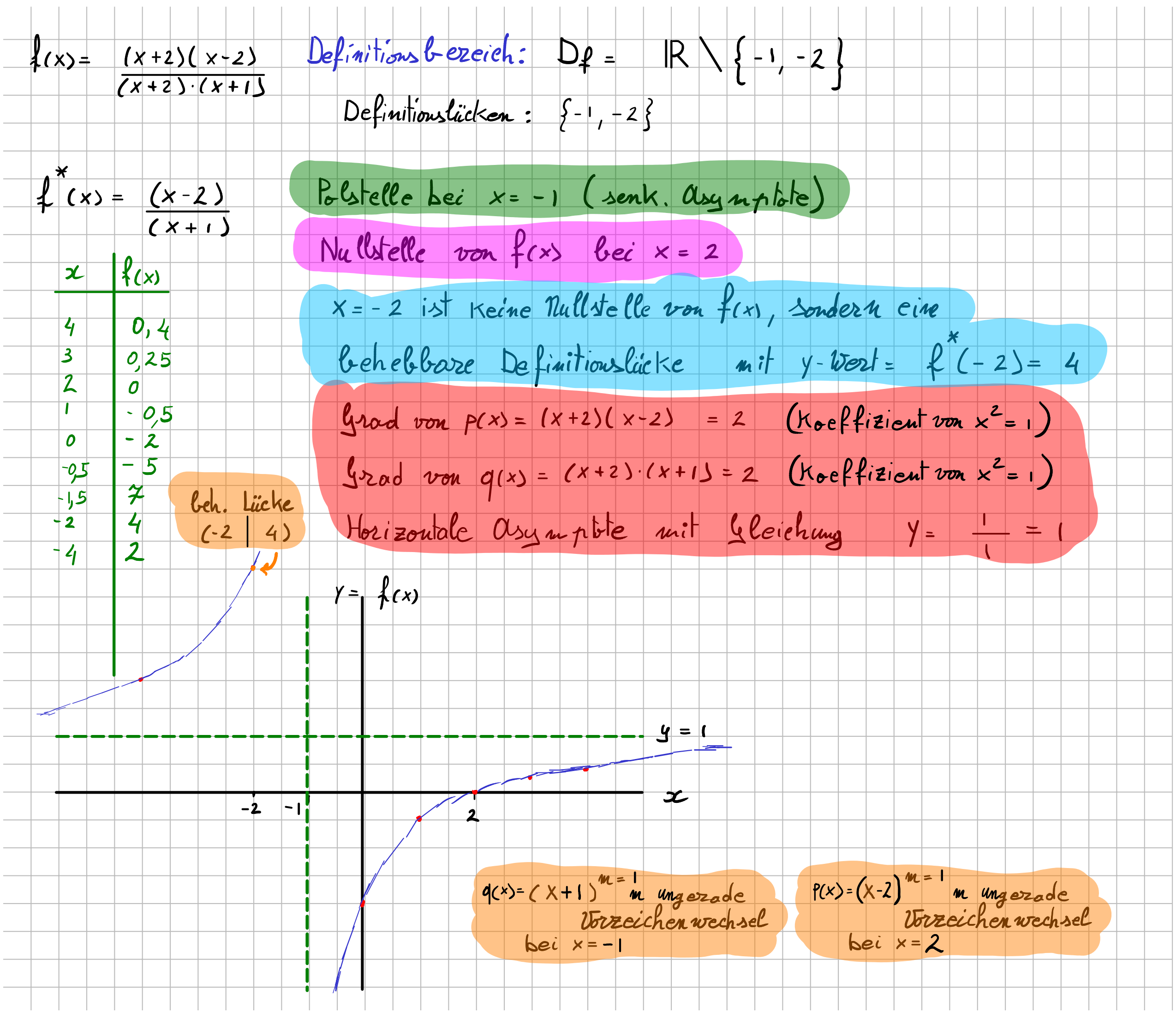
$p(x) = x^{m=1}$ m ungerade Vorzeichenwechsel bei $x = 0$

3.2 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+1)}$$

- Geben Sie Nullstellen, behebbare DL, Polstellen und die Asymptote der Funktion an. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.



3.3 AUFGABE

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - x}$$

- Geben Sie Nullstellen, behebbare DL, Polstellen und die Asymptote der Funktion an. Skizzieren Sie anschließend den Graphen.

$$f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-x} = 2 \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x \cdot (x-1)}$$

Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f^*(x) = \frac{2 \cdot (x+1)}{x}$$

Behebbare Definitionslücke $(x = 1 \mid y = f^*(1) = 4)$

Polstelle bei $x = 0$, senkrechte Asymptote mit Gleichung $x = 0$

$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ mit $P(x) = 2x^2 - 2$ mit x^2 Koeffizient 2

$q(x) = x^2 - x$ mit x^2 Koeffizient 1

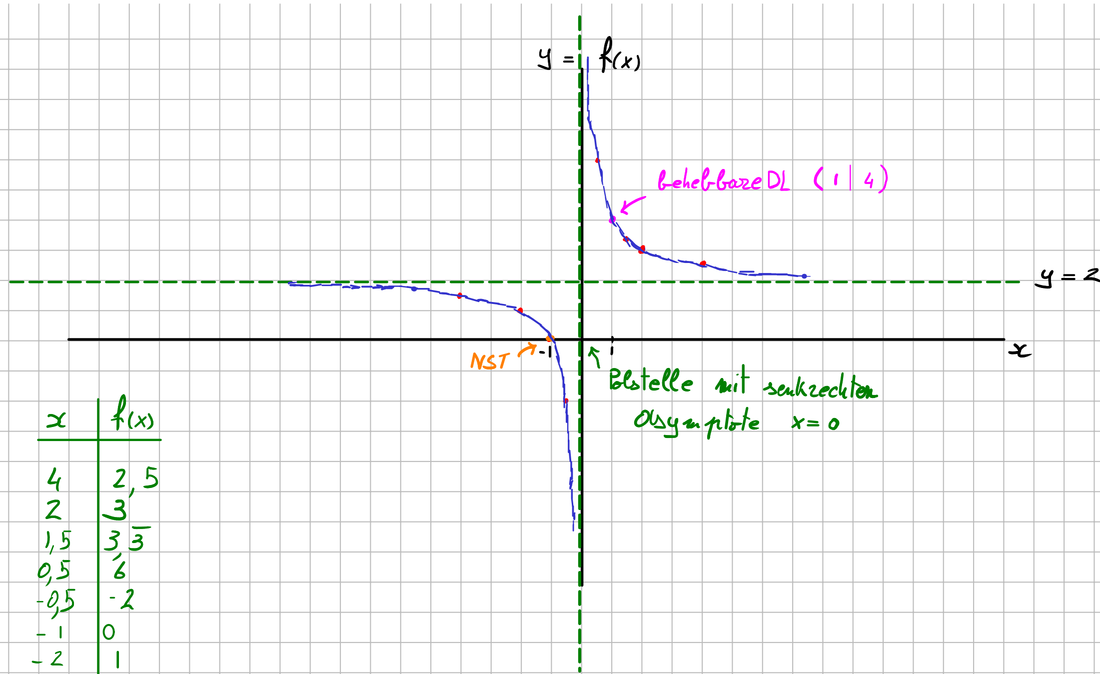
Grad von $p(x)$ = Grad von $q(x) = 2$

$\Rightarrow$ Horizontale Asymptote

mit Gleichung $y = \frac{2}{1} = 2$

Nullstelle von $f(x)$ bei $x = -1$

($x = 1$ ist keine NST von $f(x)$)



x	$f(x)$
4	2,5
2	3
1,5	3,$\overline{3}$
0,5	6
-0,5	-2
-1	0
-2	1
-4	1,5

$q(x) = x^{m=1} \cdot (x-1)$ m ungerade
Vorzeichenwechsel
bei $x = 0$

$p(x) = (x-1)\cdot(x+1)^{m=1}$ m ungerade
Vorzeichenwechsel
bei $x = -1$