3 GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN

3.1 Aufgabe: Elementare Beispiele

Stellen Sie Wertetabelle auf und skizzieren Sie die Graphen für folgende elementare Gebrochenrationale Funktionen (a ist eine beliebige reelle Zahl, n ist eine beliebige natürliche Zahl):

$$f(x)\ \frac{a}{(x-1)^n};\ g(x) = \frac{a}{(x-1)(x-2)}$$

3.1

$f(x) = \frac{a}{(x-1)^n}$ a Kostante $\neq 0$

$n \in \{1, 2, \ldots\}$ Natürliche Zahl

Definitionsbereich von $f(x)$: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

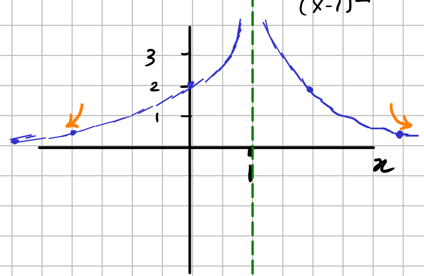
Fall

$a > 0$ z.B. $a = 2$

$y = f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$

n gerade

z.B. $n = 2$

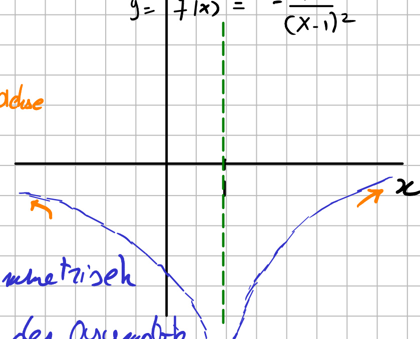


horizontale Asymptote: x-Achse

Fall

$a < 0$ z.B. $a = -1$

$y = f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$



der Graph ist symmetrisch bzgl. der senkrechten Asymptote a.d.S. $x = 1$

x	$f(x)$
3	0,5
2	2
1,5	8
-3	0,125
-2	2/9
0	2

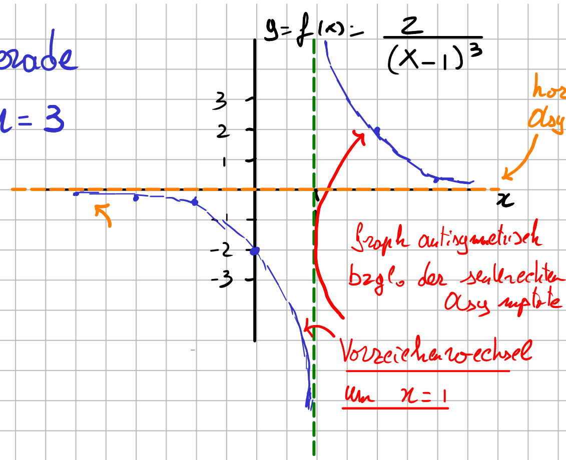
Symmetrisch bzgl. der Asymptote wegen n gerade

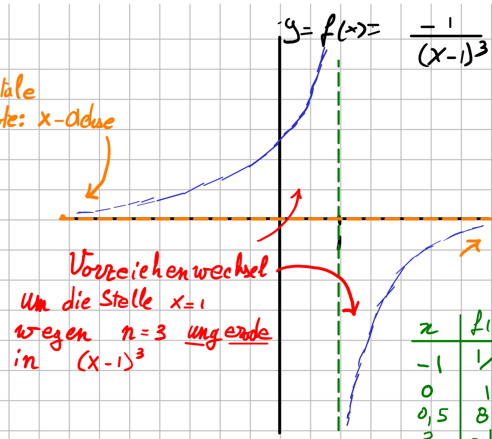
Negative Werte wegen $a < 0$

n ungerade

z.B. $n = 3$

x	$f(x)$
3	0,25
2	2
1,5	16
-3	$-\frac{1}{32}$
-2	$-\frac{2}{27}$
-1	$-\frac{1}{4}$
0	-2
0,5	-16



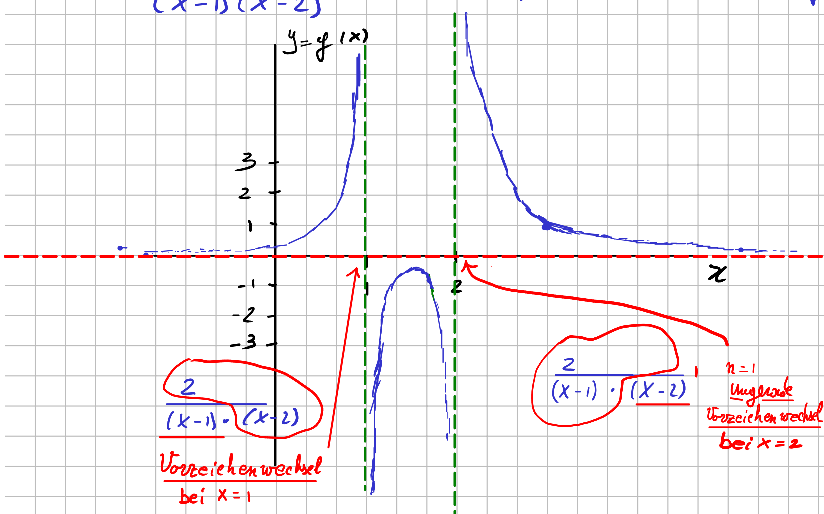


x	$f(x)$
-1	$1/8$
0	1
0,5	8
3	$-1/8$
2	-1
1,5	-8

z.B. $a = 2 > 0$

$$g(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

Definitionsbereich von $g(x) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$



x	$g(x)$
3	1
2,5	$2,\overline{6}$
1,9	-22
1,1	-22
0,9	18,1 ...

- Als x gegen $-\infty$ strebt
(also, als x immer kleiner wird, z.B. $x = -100, -1000, -10000 \ldots$)
$g(x)$ strebt gegen 0

- Als x gegen $+\infty$ strebt
(also, als x immer größer wird, z.B. $x = +100, +1000, +10000 \ldots$)
$g(x)$ strebt gegen 0

||

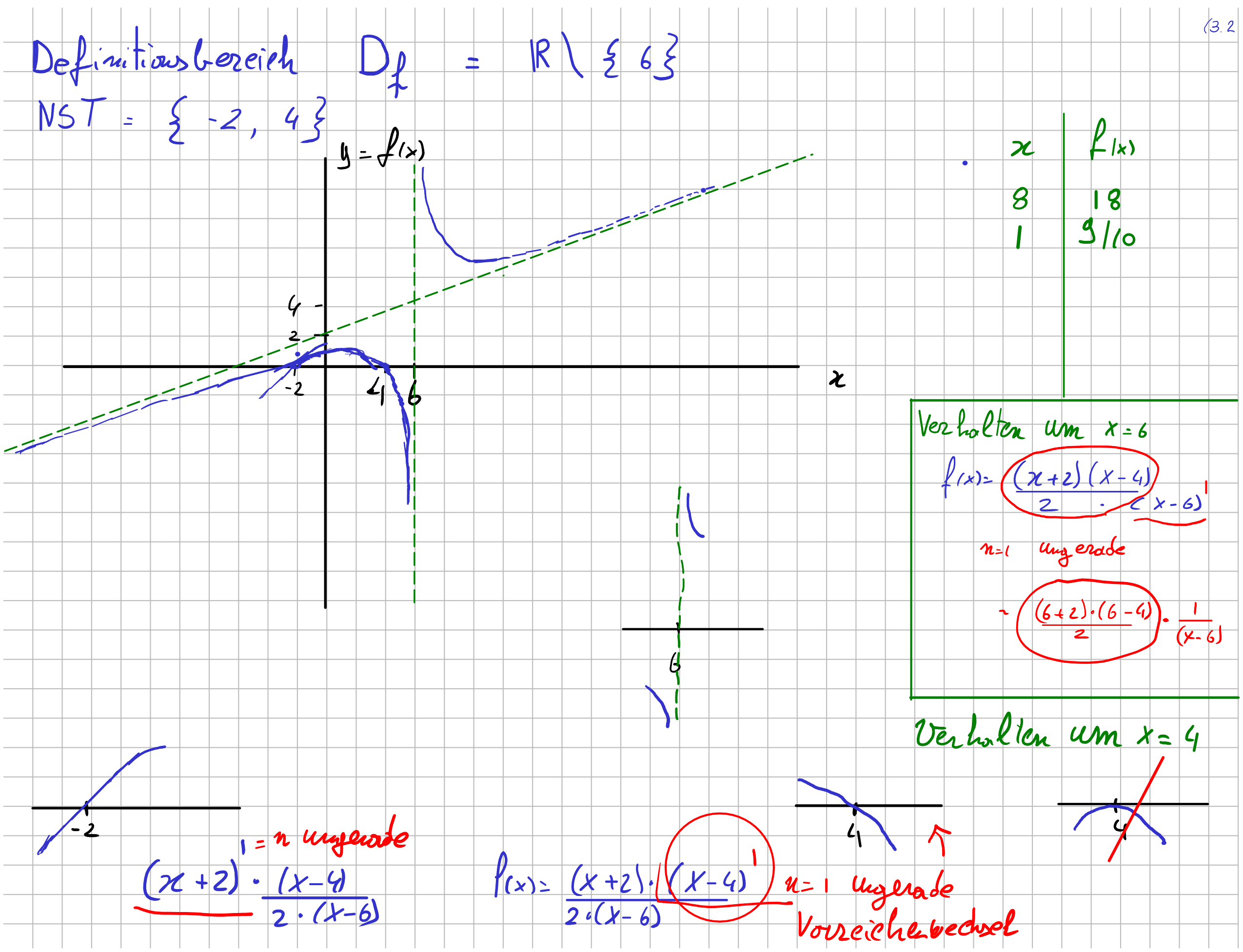
Es heißt, x-Achse ist eine horizontale Asymptote

3.2 AUFGABE

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-4)}{2\,(x-6)}$$

1. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
2. Geben Sie die Steigung für eventuelle Asymptoten
3. Skizzieren Sie den Graph



$f(x) = \dfrac{P(x)}{q(x)}$

$P(x) = (x+2)(x-4)$ Grad 2

$q(x) = 2(x-6)$ Grad 1

$2 - 1 = 1 \Rightarrow$ Asymptote schief

Steigung m dieser Asymptote?

$P(x) = x^2 - 2x - 8$

$q(x) = 2x - 12$

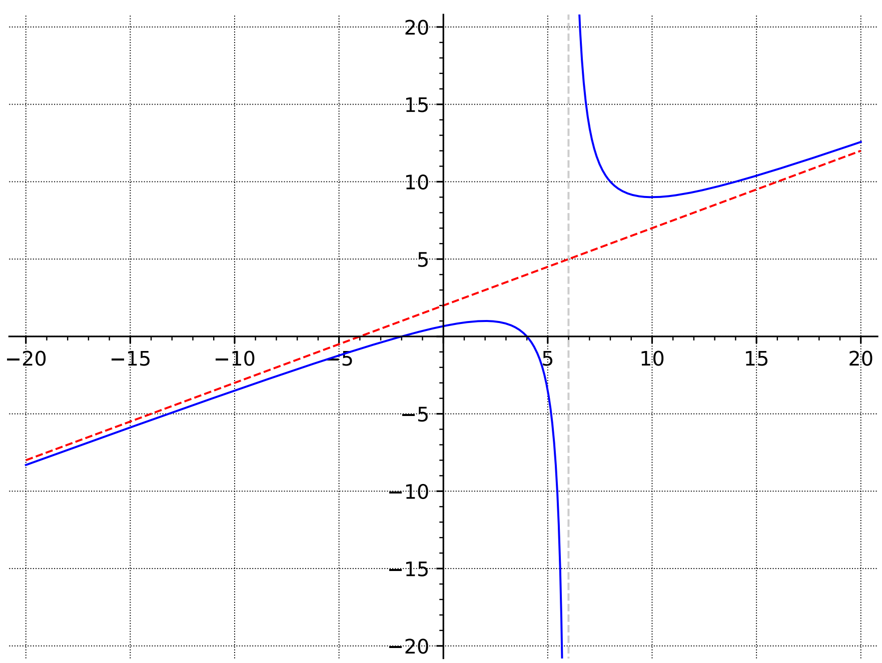
$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{2x - 12}$

$\boxed{m = \dfrac{1}{2}}$

$\dfrac{a x^2 + bx + c}{u x + v}$

1. Lösung
   a) Definitionslücken usw.:

      Definitionslücke: $\{6\}$; DefinitionsBereich: $\mathbb{R} \setminus \{6\}$; Funktionennullstelle: $\{-2, 4\}$
   b) Lücken und Polstellen:
      - Es sind keine behebbare DL vorhanden.
      - Es ist eine Polstelle bei $x = 6$ vorhanden.
   c) Asymptoten
      - Es ist eine senkrechte Asymptote bei der Polstelle vorhanden
      - Es ist Keine waagerechte Asymptoten vorhanden
      - Der Polynomgrad des Zählers ist 2, der Polynomgrad des Nenners ist 1. Es ist deswegen eine schiefe Asymptote mit Gleichung $y = \frac{1}{2}x + c$ und Steigung $m = \frac{1}{2}$
   d) Graph



3.3 AUFGABE

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 10x - 12}{10x^4 - 50x^3 - 70x^2 + 290x + 300}$$

1. Zerlegen Sie Nenner und Zähler in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Unterscheiden Sie zwischen behebbaren DL (Löcher) und nicht behebbaren DL (Polstellen)
4. Geben Sie Gleichungen für eventuelle Asymptoten
5. Skizzieren Sie den Graph

3.3

1) Horner Schema ... $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; $p(x) = 2\cdot(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)$

$q(x) = 10\cdot(x+1)(x+2)(x-3)(x-5)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, 3, 5\}$

Aufpassen: nicht alle NST von $p(x)$ sind NST von $f(x)$

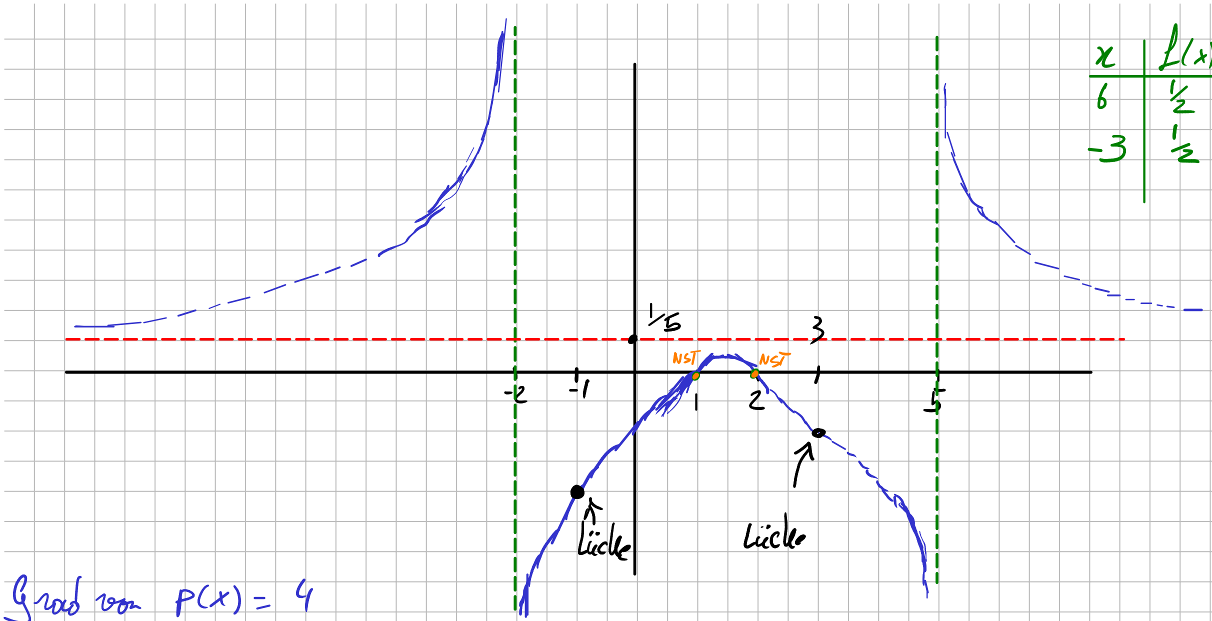
$$f(x) = \frac{2\cdot(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)}{10\cdot(x+1)(x+2)(x-3)(x-5)}$$

Vereinfache die Vorschrift: aufpassen, das ist eine neue Funktion!

$$f^*(x) = \frac{\cancel{2}\cdot(x-1)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-3)}(x-2)}{\underset{5}{\cancel{10}}\cdot\cancel{(x+1)}(x+2)\cancel{(x-3)}(x-5)} = \frac{1}{5}\,\frac{(x-1)\cdot(x-2)}{\underline{(x+2)}(x-5)}$$

$D_{f^*} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

Behebbare DL: $\{(-1, \underset{=-\frac{1}{5}}{f^*(-1)}) ; (3, \underset{=-\frac{1}{25}}{f^*(3)})\}$



x	$f(x)$
6	$\frac{1}{2}$
-3	$\frac{1}{2}$

Grad von $p(x) = 4$

Grad von $q(x) = 4$ $\Rightarrow$ horizontale Asymptote

mit Höhe $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

1. Lösung

   a) Zerlegung:

      Zähler: $p(x) = 2(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6)$. Da $p(x)$ ganzzahlige Koeffizienten besitzt, wir hoffen, dass die Nullstellen ganzzahlig und Teiler von 6 sind, d.h. Elemente aus $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Man verifiziert z.B. dass $p(1) = 0$, d.h. $(x-1)$ lässt sich faktorisieren nach dem Horner Schema:

	1	-5	5	5	-6
1	0	1	-4	1	6
	1	-4	1	6	0

      Also, $p(x) = 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + x + 6x)$. Man verifiziert, dass -1 ebenso eine Nullstelle ist .

	1	-4	1	6
-1	0	-1	5	-6
	1	-5	6	0

      Es folgt $p(x) = 2(x-1)(x+1)(x^2 - 5x + 6)$. Man verifiziert, dass 3 ist ebenso eine Nullstelle ist .

	1	-5	6
3	0	3	-6
	1	-2	0

      Also, $p(x) = 2(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)$.

      Nenner: $q(x) = 10(x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30)$. Die Nullstellen können Teiler von 30 sein. Eine Nullstelle ist z.B. -1. Horner Schema:

	1	-5	-7	29	30
-1	0	-1	6	1	-30
	1	-6	-1	30	0

      Es folgt, dass $q(x) = 10(x+1)(x^3 - 6x^2 - x + 30)$. Eine weitere Nullstelle ist -2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & -1 & 30 \\ -2 & 0 & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

Es folgt, dass $q(x) = 10(x+1)(x+2)(x^2-8x+15)$ und, nach Anwendung der p-q Formel

$$q(x) = 10(x+1)(x+2)(x-3)(x-5)$$

b) Definitionslücken usw.:

Definitionslücken: $\{-2, -1, 3, 5\}$; DefinitionsBereich: $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3, 5\}$; Zählernullstellen: $\{-1, 1, 2, 3\}$; Funktionennullstellen: $\{1, 2\}$

c) Lücken und Polstellen:

Lücken: $\{(x = -1, y = -1/5); (x = 3, y = -1/25)\}$; Polstellen $\{-2, 5\}$

d) Asymptoten:

Senkrechte Asymptoten: $x = -2$; $x = 5$;

Waagerechte Asymptote der Form $y = \frac{1}{5}$

e) Graph