3.4 AUFGABE

Gegeben sei die folgende Gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^5 - 16x^4 + 40x^3 - 20x^2 - 42x + 36}{10x^4 - 50x^3 - 70x^2 + 290x + 300}$$

1. Zerlegen Sie Nenner und Zähler in Produktform
2. Bestimmen Sie Nullstellen, Definitionslücke und Definitionsbereich der Funktion
3. Unterscheiden Sie zwischen behebbaren DL (Löcher) und nicht behebbaren DL (Polstellen)
4. Geben Sie Gleichungen für eventuelle Asymptoten
5. Skizzieren Sie den Graph

3.4

$f(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ Zerlegung von $P(x) = 2\cdot(x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 10x^2 - 21x + 18)$

Wenn ganzzahlige NST vorhanden sind, dann $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$

$P(1) = 0$

	1	-8	20	-10	-21	18
1	0	1	-7	13	3	-18
	1	-7	13	3	-18	0

1 ist eine einfache NST

1	0	1	-6	7	10
	1	-6	7	10	-8

-1 ist mindestens eine einfache NST

	1	-7	13	3	-18
-1	0	-1	8	-21	18
	1	-8	21	-18	0
3	0	3	-15	18	
	1	-5	6	0	

entspricht $x^2 - 5x + 6 \overset{\text{p-q-Formel}}{=} (x-2)\cdot(x-3)$

$P(x) = 2\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

$= 2\cdot(x-1)(x+1)(x-3)^2(x-2)$

$q(x) = 10(x+1)(x+2)(x-3)(x-5)$

Definitionsbereich von $f(x)$ = $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, 3, 5\}$

$$f^*(x) = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot (x-1)\cancel{(x+1)}(x-3)^{\cancel{2}}(x-2)}{\overset{5}{\cancel{10}}\cancel{(x+1)}(x+2)\cancel{(x-3)}(x-5)} = \frac{1}{5}\,\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{\underline{(x+2)(x-5)}}$$

Grad $p(x) = 5$ Grad von $q(x) = 4$; Grad $p(x)$ - Grad $q(x) = 1$

=> schiefe Asymptote mit Steigung $\frac{1}{5}$

Polstellen und senkrechte Asymptote

be $x = -2$ und $x = 5$

NST von $f^*(x)$: $\{1, 2, 3\}$

NST von $f(x)$: $\{1, 2\}$

$\{3\}$ behebbare Lücke

$(3, f^*(3) = 0)$

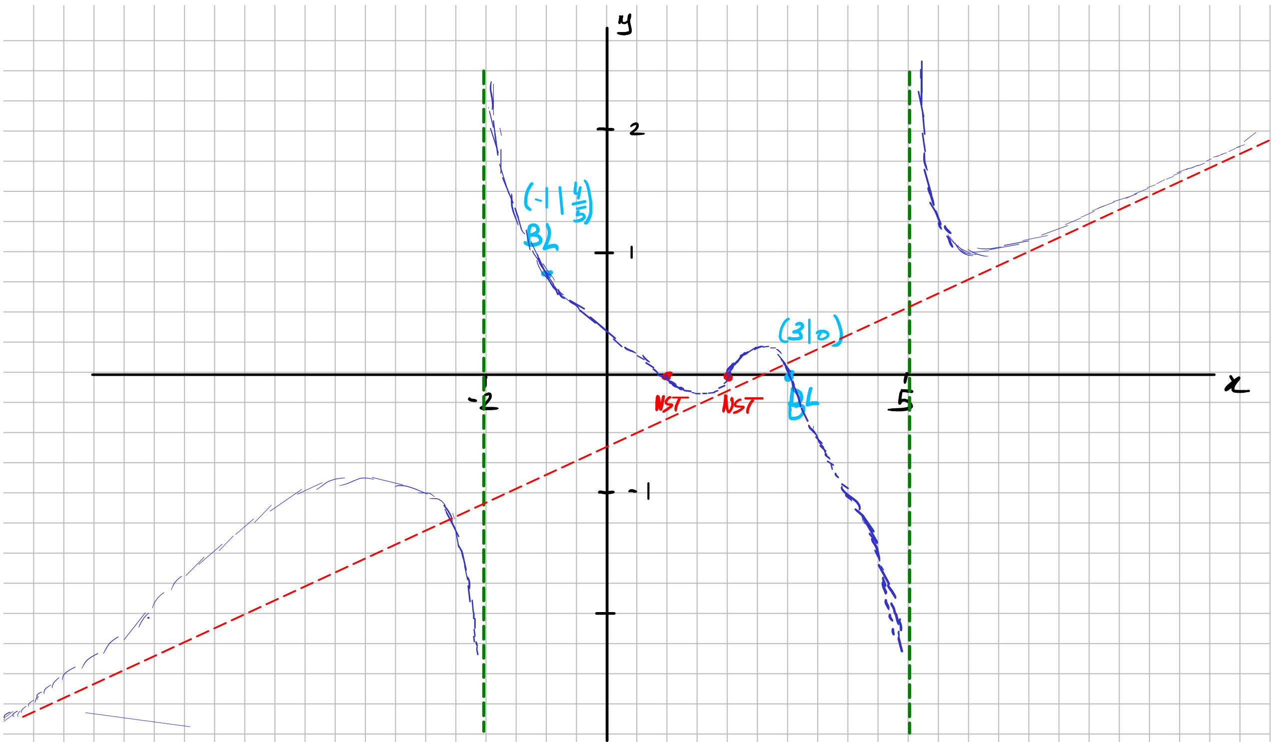
Keine NST von $f(x)$!

behebbare Definitionslücke

bei $x = -1$ mit y-Wert

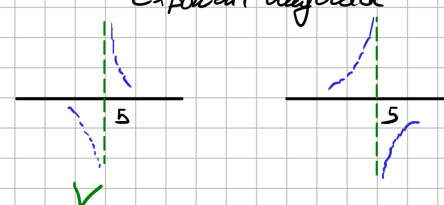
$$f^*(-1) = \frac{1}{5} \cdot \frac{(-1-1)\cdot(-1-3)(-1-2)}{(-1+2)(-1-5)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, \frac{4}{5})$



$$f^*(x) = \frac{1}{5}\,\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-5)^1}$$

Exponent ungerade



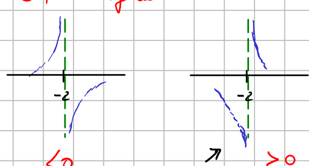
$$\frac{1}{5}\,\frac{(x-1)(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-5)}$$

$(x+2)^1$

$f^*(-2{,}1) = -18{,}\ldots$

$$\frac{1}{5}\,\frac{(-2-1)\cdot(-2-3)(-2-2)}{(-2-5)}$$

Exponent ungerade



Gleichungen für die Asymptote

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 5 \end{array}\right\} \text{senkrechte Asymptote}$$

Schiefe Asymptote

$$y = \frac{2}{5}x + c$$

das lassen wir unbestimmt.

1. Lösung

   a) Zerlegung:

   Zähler: $p(x) = 2(x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 10x^2 - 21x + 18)$. Da $p(x)$ ganzzahlige Koeffizienten besitzt, wir hoffen, dass die Nullstellen ganzzahlig und Teiler von 18 sind, d.h. Elemente aus $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$. Man verifiziert z.B. dass $p(1) = 0$, d.h. $(x - 1)$ lässt sich faktorisieren nach dem Horner Schema:

   $$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -8 & 20 & -10 & -21 & 18 \\ 1 & 0 & 1 & -7 & 13 & 3 & -18 \\ \hline & 1 & -7 & 13 & 3 & -18 & 0 \end{array}$$

   Also, $p(x) = 2(x - 1)(x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18)$. Man verifiziert, dass -1 ebenso eine Nullstelle ist .

   $$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 13 & 3 & -18 \\ -1 & 0 & -1 & 8 & -21 & 18 \\ \hline & 1 & -8 & 21 & -18 & 0 \end{array}$$

   Es folgt $p(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x^3 - 8x^2 + 21x - 18)$. Man verifiziert, dass 3 ist ebenso eine Nullstelle ist .

   $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -8 & 21 & -18 \\ 3 & 0 & 3 & -15 & 18 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

   Also, $p(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x^2 - 5x + 6)$. Nach Anwendung der p-q Formel folgt:

   $$p(x) = 2(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)(x-3) = 2(x-1)(x+1)(x-2)(x-3)^2$$

   Nenner: Wie in der vorigen Aufgabe: $q(x) = 10(x + 1)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$

   b) Definitionslücken usw.:

   Definitionslücken: $\{-2, -1, 3, 5\}$; DefinitionsBereich: $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 3, 5\}$; Zählernullstellen: $\{-1, 1, 2, 3\}$; Behebbare Definitionslücken: $\{-1, 3\}$; Funktionennullstellen: $\{1, 2\}$.

c) Lücken und Polstellen:

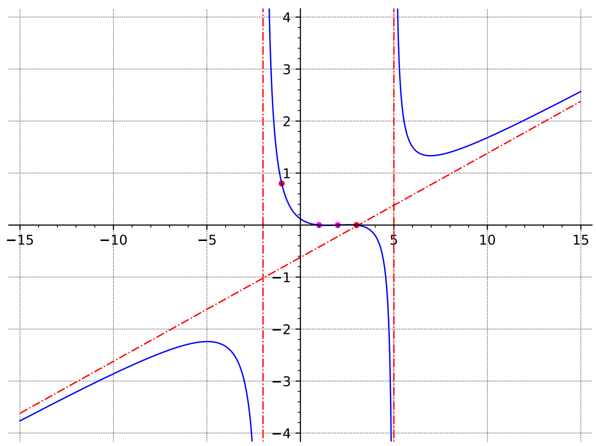
   Lücken: $\{(-1, 4/5); (3, 0)\}$; Polstellen $\{-2, 5\}$

d) Asymptoten:

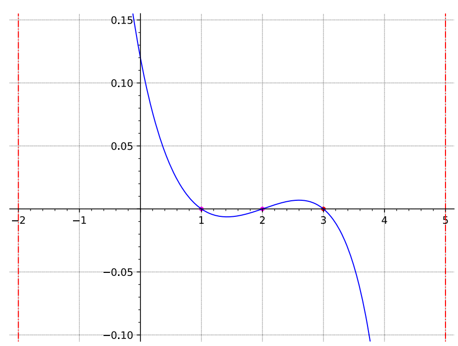
   Senkrechte Asymptoten: $x = -2;\ x = 5;$

   Asymptot der Form $y = \frac{1}{5}x + c$. Wie man die Konstante c bestimmt haben wir nicht besprochen, deswegen müssen Sie es hier nicht tun.

e) Graph



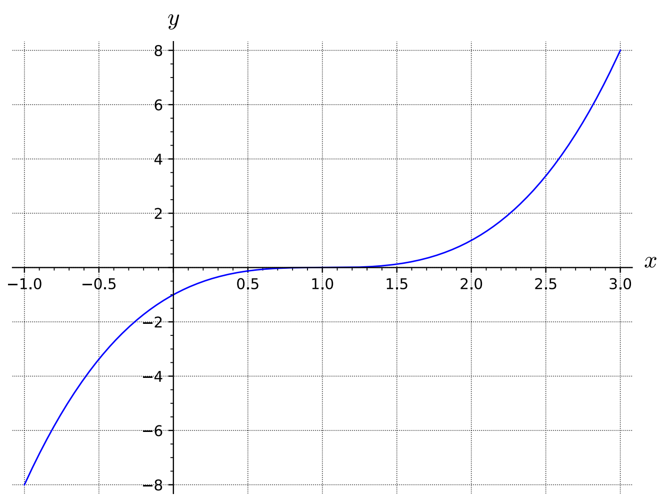
- Detail:



4 UMKEHRFUNKTIONEN, LOGARITHMUS UND E-FUNKTION

4.1 AUFGABE

Das folgende Bild stellt den Graphen der Funktion $f(x) = (x-1)^3$ dar.

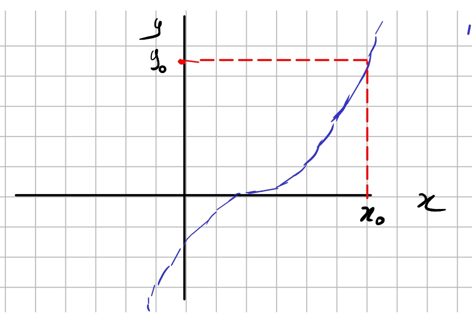


- Der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $\mathbb{R}$. Was ist ihrer Wertebereich?
- Was sind Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie ihren Graph

Wertebereich von $f(x)$: $\mathbb{R}$

Definitionsbereich der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

$D_{f^{-1}}$ = Wertebereich von $f(x)$ = $\mathbb{R}$



Wertebereich von $f^{-1}(x)$ = $D_f = \mathbb{R}$

Vorschrift für $f^{-1}(x)$

$y = f(x) \qquad y = (x-1)^3$

$$\sqrt[3]{y} = (x-1)$$

$$1 + \sqrt[3]{y} = x$$

Vorschrift der Umkehrfunktion:

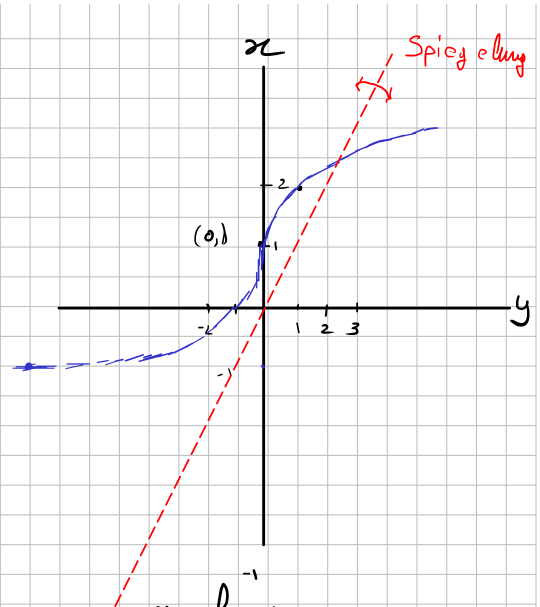
$$x = 1 + \sqrt[3]{y}$$

$$x = f^{-1}(y)$$

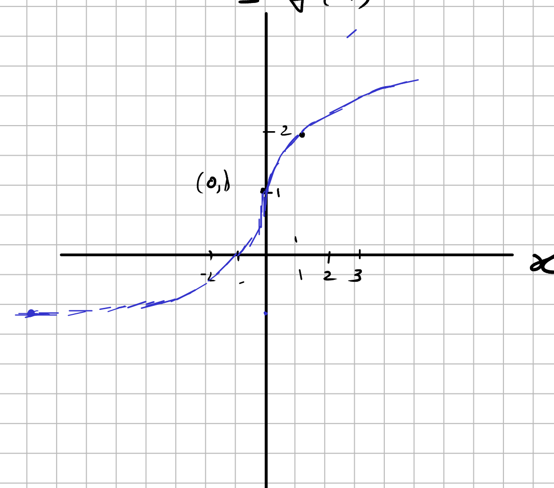
$$y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$$

gleiche Funktion!

Nur Variablenname geändert



$y = f^{-1}(x)$



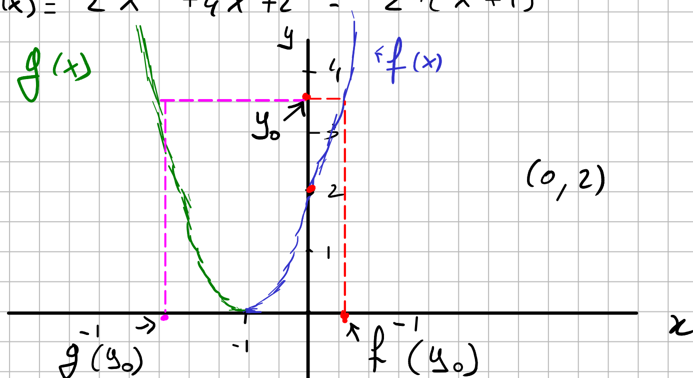
4.2 AUFGABE

Bestimmen Sie Umkehrfunktionen für die folgende Funktionen

- $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$; Definitionsbereich: $D_f = [-1, \infty[$
- $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$; Definitionsbereich: $D_g =]-\infty, -1]$

$f(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2 \cdot (x+1)^2$ $\qquad D_f = [-1, \infty[$

$g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2 \cdot (x+1)^2$ $\qquad D_g =]-\infty, -1]$



$(0, 2)$

$\sqrt{\frac{2}{2}} = 0 + 1$

$\cancel{-\sqrt{\frac{2}{2}} = 0 + 1}$

Vorschrift für $f^{-1}(x)$

$y = f(x) = 2(x+1)^2$

$y = 2(x+1)^2$

$\frac{y}{2} = (x+1)^2$

$\sqrt{\frac{y}{2}} = (x+1)$

$\sqrt{\frac{y}{2}} - 1 = x$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{2}} - 1$

$\boxed{y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1}$

$y = g(x)$

$\frac{y}{2} = (x+1)^2$

$-\sqrt{\frac{y}{2}} = x + 1$

$x = -1 - \sqrt{\frac{y}{2}} = g^{-1}(y)$

$\boxed{y = g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{\frac{x}{2}}}$

	Definitionsbereich	Wertebereich
$f(x)$	$D_f = [-1, \infty[$	$W_f = [0, \infty[$
$f^{-1}(x)$	$D_{f^{-1}} = [0, \infty[$	$W_{f^{-1}} = [-1, \infty[$
$g(x)$	$D_g =]-\infty, -1]$	$W_g = [0, \infty[$
$g^{-1}(x)$	$D_{g^{-1}} = [0, \infty[$	$W_{g^{-1}} =]-\infty, -1]$