4 UMKEHRFUNKTIONEN, LOGARITHMUS UND E-FUNKTION

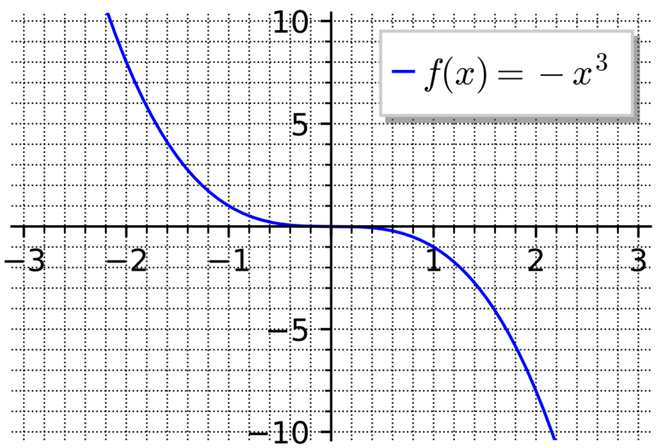
Themen:

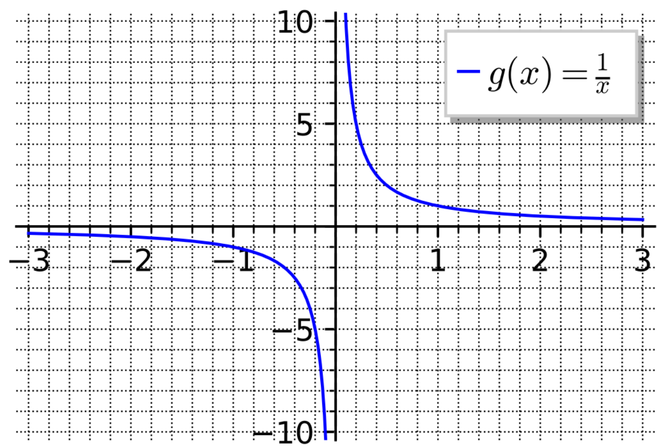
- Umkehrfunktion *[Pa1] §III.2.5*
- Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion *[Pa1] §III.11.1, §III.11.2, §III.12.1 §III.12.2* sowie *[Şa] §2.3, §2.4*
- Exponential- und Logarithmusgleichungen *[Pa1] §III.12.3*

4.1 AUFGABE: GRAPHEN VON UNMKEHRFUNKTIONEN

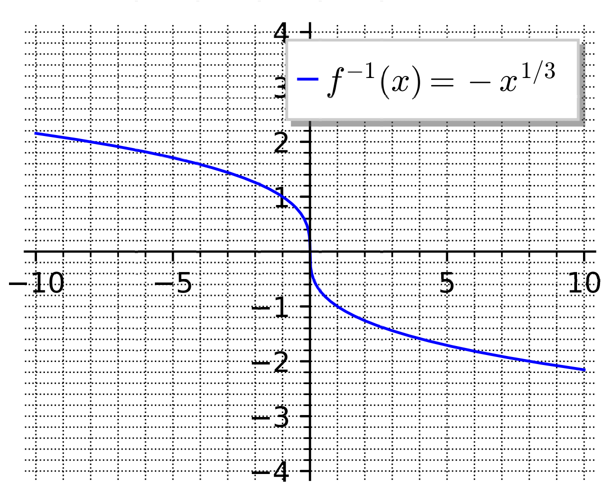
Gegeben seien die folgende Funktionen mit ihren Graphen.

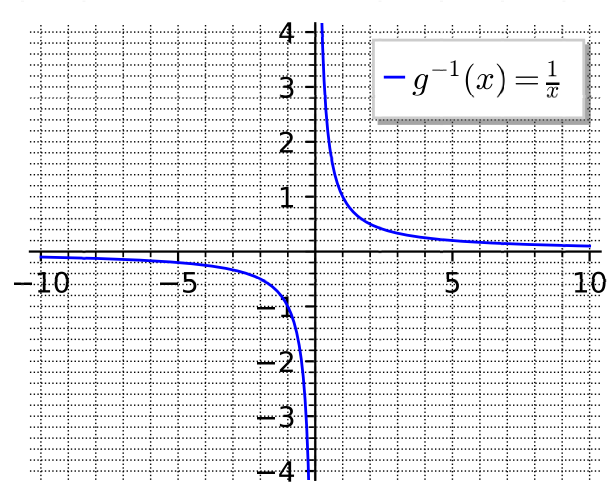
- Skizzieren Sie die Graphen für die entsprechende Umkehrfunktionen.
- Geben Sie die Vorschrifte der Umkherfunktionen an





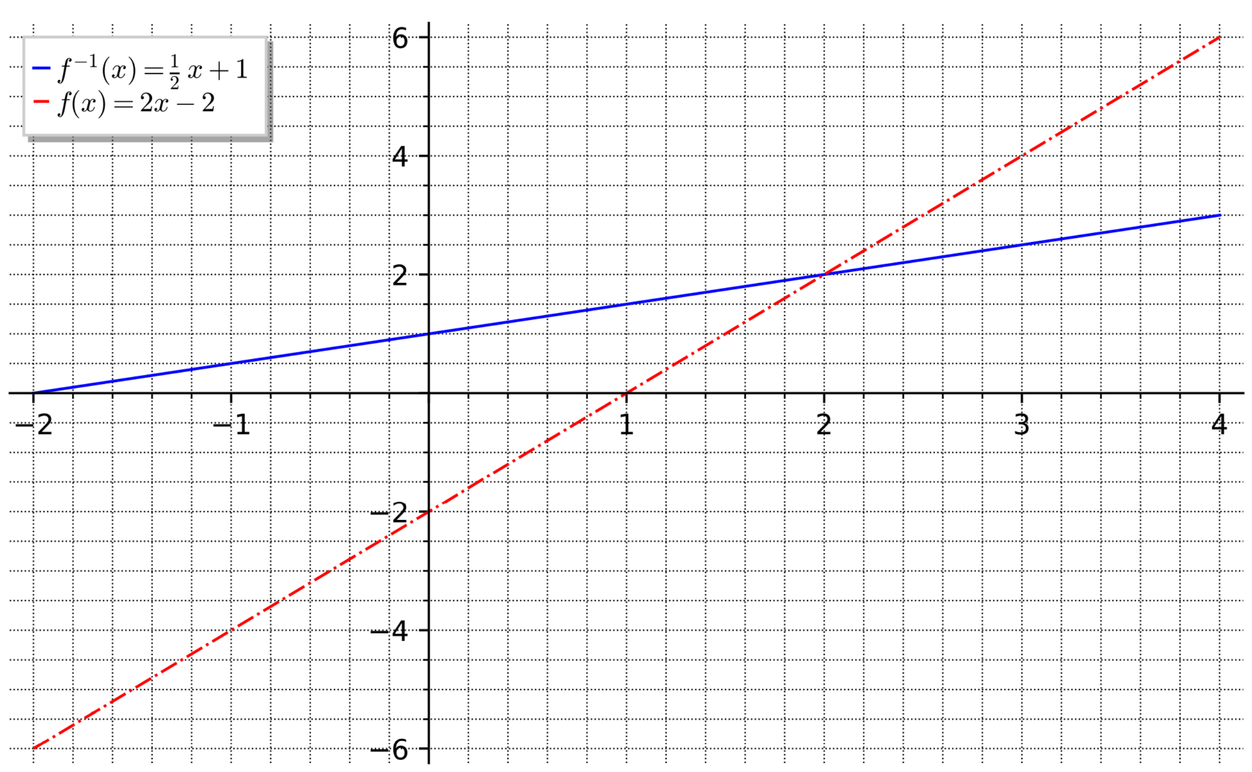
1. Lösung:





4.2 AUFGABE

Das folgende Bild stellt den Graph der Funktion $f(x) = 2x - 2$ dar.



- Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle:

-4	-2	0	2	4
-3	-2	-1	0	1

- Stellen Sie den Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ auf
- Geben Sie die Vorschrift der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ an

$y = f(x) = 2x - 2$

$y = 2x - 2$

$\frac{y}{2} = x - 1$

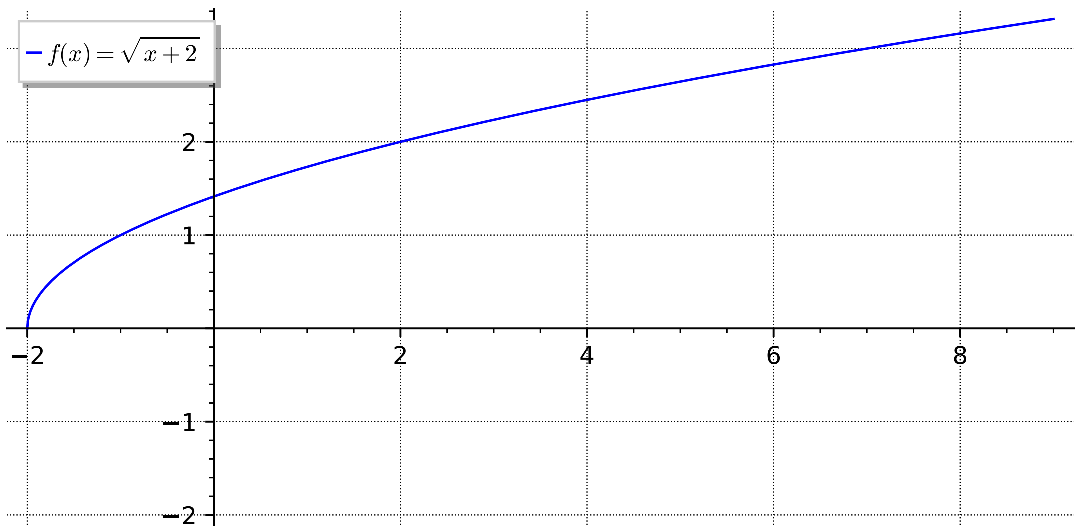
$x = \frac{y}{2} + 1$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} + 1$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + 1$

4.3 AUFGABE

Das folgende Bild stellt den Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ mit Definitionsbereich $[-2, \infty]$ dar.



- Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle:

x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	3
$f^{-1}(x)$	-2	-1	0	1	2	7

Aus dem Bild und Vorschrift $f(x)=\sqrt{x+2}$ erkennen wir:

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	$\sqrt{2}$
1	$\sqrt{3}$
2	2
7	3

Es folgt:

x	$f^{-1}(x)$
0	-2
1	-1
$\sqrt{2}$	0
$\sqrt{3}$	1
2	2
3	7

- Stellen Sie den Graph der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ auf
- Geben Sie Definitionsbereich, Wertebereich und Vorschrift der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ an

$f(x) = \sqrt{x+2}$

Definitionsbereich $D_f = [-2, \infty[$

Wertebereich $W_f = [0, \infty[$

$f^{-1}(x)$

Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$

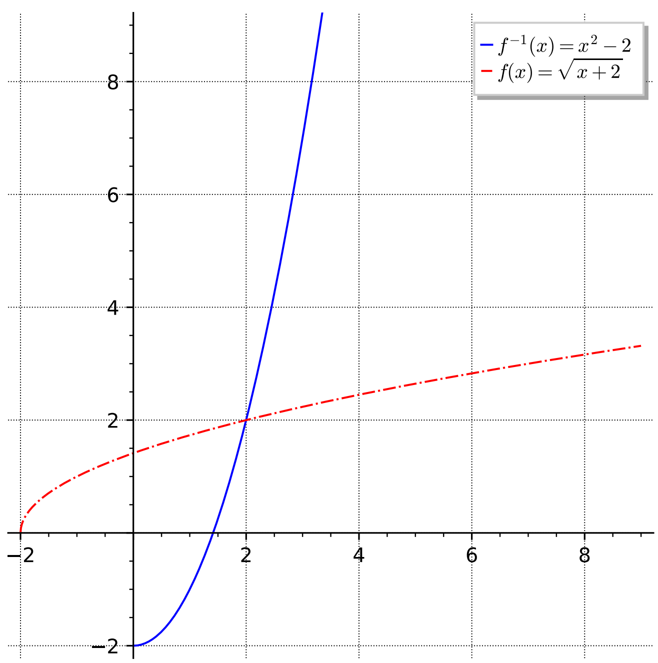
Wertebereich $W_{f^{-1}} = [-2, \infty[$

$$y = f(x) = \sqrt{x+2}$$
$$y = \sqrt{x+2}$$
$$y^2 = x+2$$
$$x = y^2 - 2$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2$$

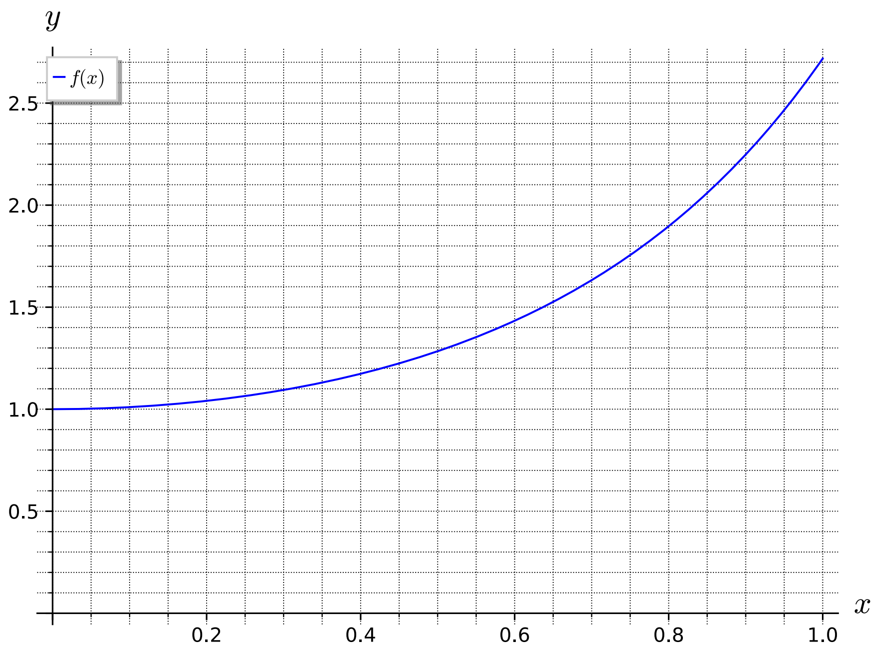
Verifizierung der Vorschrift:

$$f(f^{-1}(x)) = f(x^2-2) = \sqrt{(x^2-2)+2} = \sqrt{x^2} = x \checkmark$$



4.4 AUFGABE

Sei $f(x) = e^{x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = [0, 1]$.



- Was sind Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie die Vorschrift von $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie ihren Graphen

Definitionsbereich $D_f = [0, 1]$ Wertebereich $W_f = [1, e]$

$D_{f^{-1}} = [1, e]$ $W_{f^{-1}} = [0, 1]$

$y = f(x) = e^{x^2}$

$y = e^{x^2}$

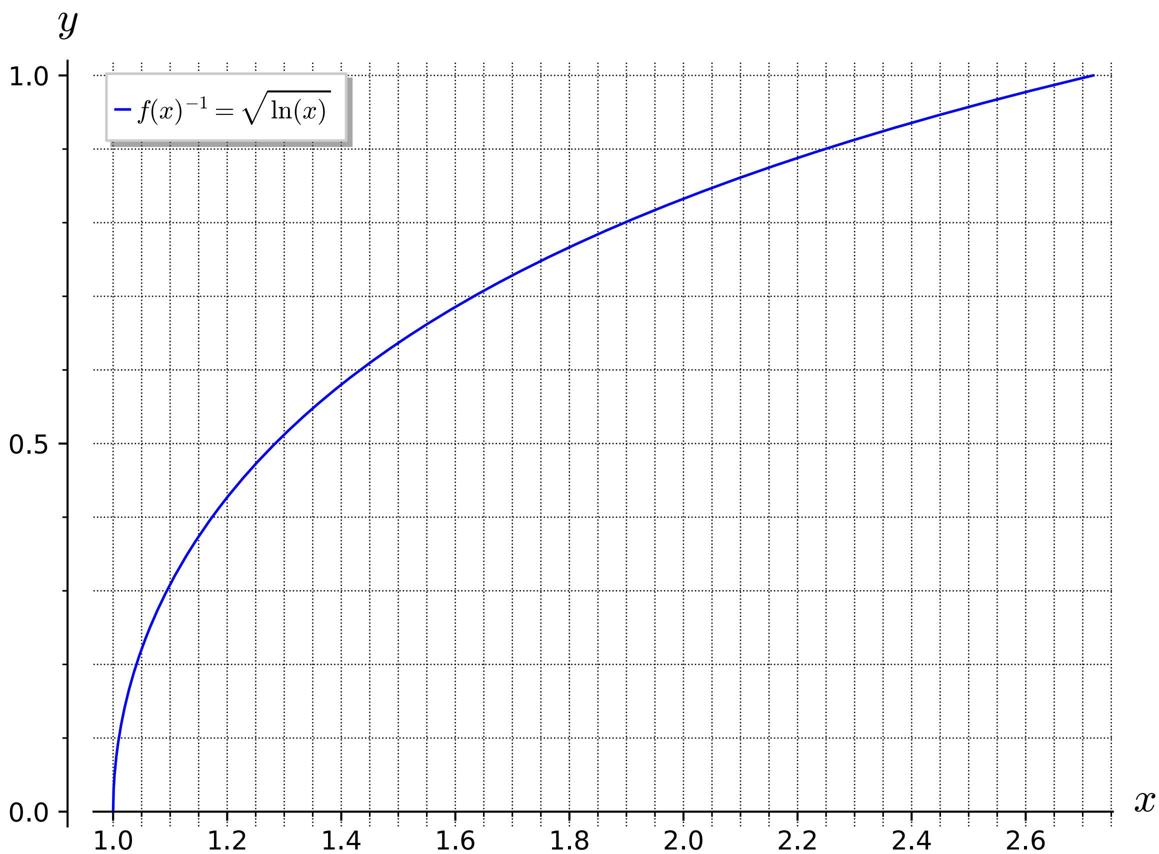
$\ln(y) = \ln(e^{x^2})$

$\ln(y) = x^2$

$x = \pm\sqrt{\ln(y)}$ wir wählen + da $W_{f^{-1}}$ positiv

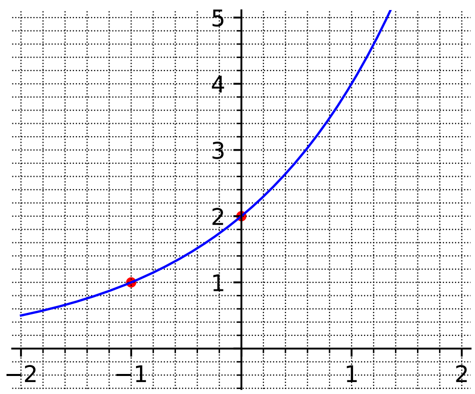
$x = \sqrt{\ln(y)}$

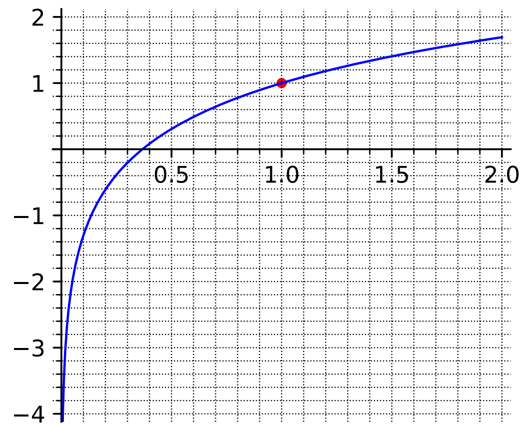
$f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(y)}$


y
1.0
0.5
0.0
$f(x)^{-1} = \sqrt{\ln(x)}$
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
x

4.5 AUFGABE

Gegeben seien folgende Graphen von Exponentialfunktionen der Form $b \cdot e^{ax}$ und Logarithmusfunktionen der Form $\ln(ax)$:





- Bestimmen Sie die entsprechende Funktionsgleichungen
- Bestimmen Sie ihre Umkehrfunktionen und skizzieren Sie entsprechende Graphen

$f(x) = b\,e^{ax}$

aus dem Bild: $f(0) = 2$; $f(-1) = 1$

Es folgt: $\Rightarrow 2 = f(0) = b \cdot e^{a \cdot 0} = b \quad \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow 1 = f(-1) = 2 \cdot e^{a \cdot (-1)} = 2 \cdot e^{-a}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-a}$

$\Rightarrow \ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(e^{-a})$

$\Rightarrow \ln(\tfrac{1}{2}) = -a$

$\Rightarrow a = -\ln(\tfrac{1}{2}) = \ln(2)$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot e^{\ln(2)x} = 2 \cdot 2^{x} = 2^{x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$W_f =]0, +\infty[$

$g(x) = \ln(a x)$

aus dem Bild: $g(1) = 1$

$\Rightarrow \ln(a \cdot 1) = 1$

$\Rightarrow \exp(\ln(a)) = \exp(1)$

$\Rightarrow a = e$

$\Rightarrow \boxed{g(x) = \ln(e \cdot x)}$

$D_g =]0, +\infty[$

$W_g = \mathbb{R}$

Umkehrfunktionen:

$y = f(x) = 2 \cdot 2^x$

$y = 2 \cdot 2^x$

$\Rightarrow \frac{y}{2} = 2^x$

$\Rightarrow \log_2(y/2) = \log_2(2^x)$

$\Rightarrow \log_2(y/2) = x$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_2(y/2)$

$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)}$ $\boxed{D_{f^{-1}} =]0, +\infty[}$

$\boxed{W_{f^{-1}} = \mathbb{R}}$

$y = g(x) = \ln(e x$

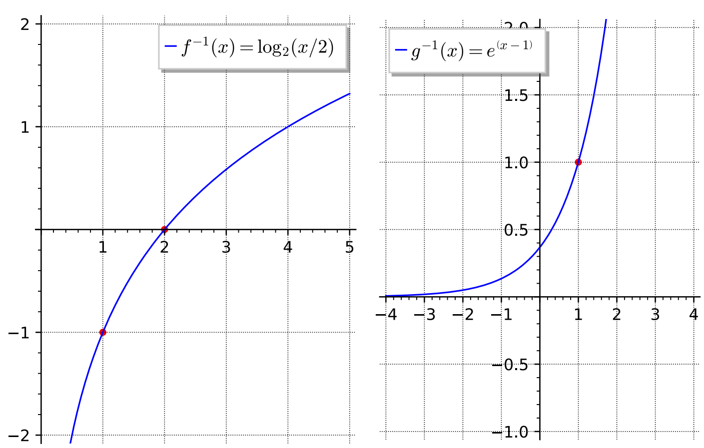
$y = \ln(e x)$

$\exp(y) = \exp(\ln(e \cdot x))$

$e^y = e \cdot x$

$x = \frac{e^y}{e} = e^{y-1}$

$g^{-1}(x) = e^{x-1}$



4.6 AUFGABE

Lösen Sie die folgende Gleichungen:

1. $e^{x^2} = 2$
2. $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$
3. $\log_x(100) = 4$

1. $e^{x^2} = 2$

$\ln(e^{x^2}) = \ln(2)$

$x^2 = \ln(2)$

Lösungen: $x = \pm\sqrt{\ln(2)}$

2. $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$

Setze $z = 3^x$

$z^2 - 3z - 2 = 0$

P-Q-Formel $z = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{17}}{2} \approx 3{,}56 \\ \frac{3-\sqrt{17}}{2} \approx -0{,}56 \end{cases}$

$$z = 3^x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow \log_3(3^x) = \log_3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Einzige Lösung: $x = \log_3\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

$3^x = \frac{3-\sqrt{17}}{2} = \sim -0,56$ nie erfüllt, da $3^x > 0$!

3.

$$\log_x(100) = 4$$

$$x^{\log_x(100)} = x^4$$

$$100 = x^4$$

$x^2 = +10$ / -10 nie erfüllt, da $x^2 \geq 0$

$x = \sqrt{10}$ / $-\sqrt{10}$ problematisch, da $\log_{-10}(\ )$??

Es heißt, wir möchten nur positive Basis: $\log_a(\ )$ mit $a > 0$

Einzige Lösung: $x = \sqrt{10}$