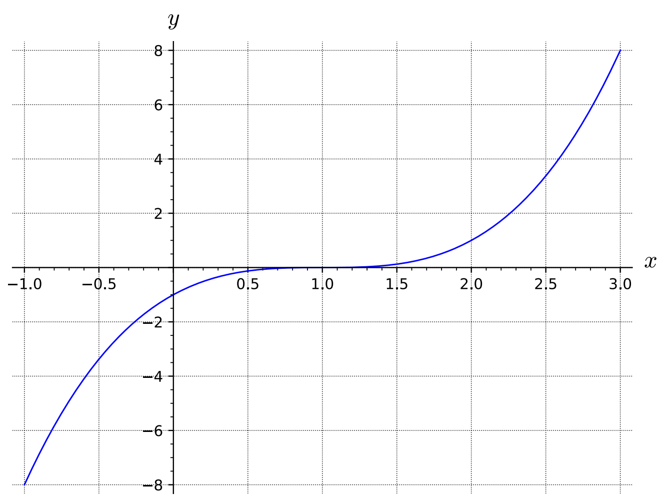
4

UMKEHRFUNKTIONEN, LOGARITHMUS UND E-FUNKTION

4.1 AUFGABE

Das folgende Bild stellt den Graphen der Funktion $f(x) = (x-1)^3$ dar.

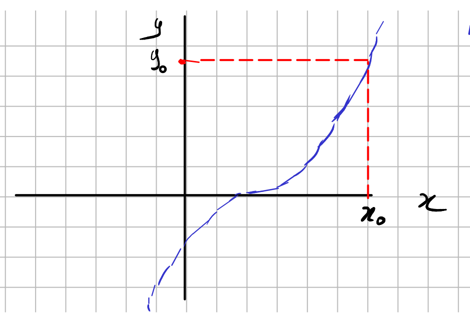


- Der Definitionsbereich von $f(x)$ ist $\mathbb{R}$. Was ist ihrer Wertebereich?
- Was sind Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie ihren Graph

Wertebereich von $f(x)$: $\mathbb{R}$

Definitionsbereich der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

$D_{f^{-1}}$ = Wertebereich von $f(x)$ = $\mathbb{R}$



Wertebereich von $f^{-1}(x)$: $D_f = \mathbb{R}$

Vorschrift für $f^{-1}(x)$

$y = f(x)$ $\qquad y = (x-1)^3$

$\sqrt[3]{y} = (x-1)$

$1 + \sqrt[3]{y} = x$

Vorschrift der Umkehrfunktion:

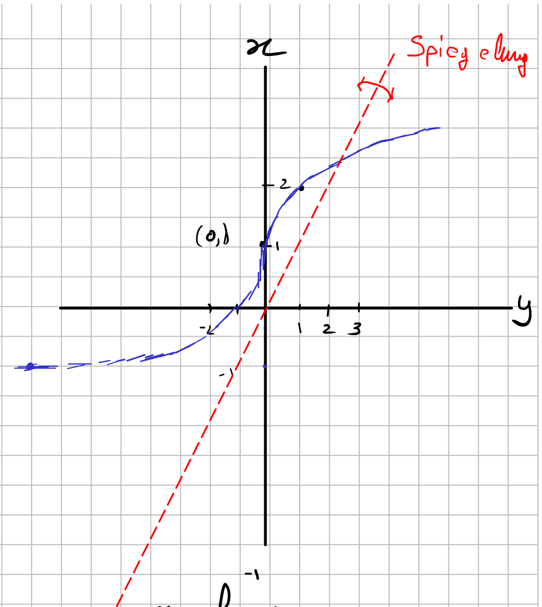
$x = 1 + \sqrt[3]{y}$

$x = f^{-1}(y)$

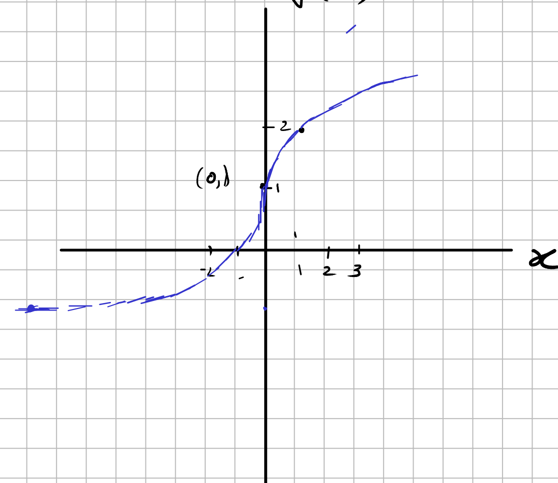
$y = f^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

gleiche Funktion!

Nur Variablenname geändert



$y = f^{-1}(x)$



4.2 AUFGABE

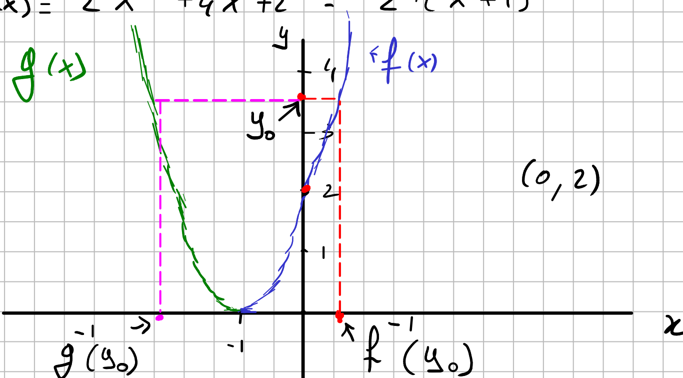
Bestimmen Sie Umkehrfunktionen für die folgende Funktionen

- $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$; Definitionsbereich: $D_f = [-1, \infty[$
- $g(x) = 2x^2 + 4x + 2$; Definitionsbereich: $D_g =]-\infty, -1]$

2

$f(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2 \cdot (x+1)^2$ $\qquad D_f = [-1, \infty[$

$g(x) = 2x^2 + 4x + 2 = 2 \cdot (x+1)^2$ $\qquad D_g =]-\infty, -1]$



$(0, 2)$

$\sqrt{\frac{2}{2}} = 0 + 1$

~~$-\sqrt{\frac{2}{2}} = 0 + 1$~~

Vorschrift für $f^{-1}(x)$

$y = g(x)$

$\frac{y}{2} = (x+1)^2$

$-\sqrt{\frac{y}{2}} = x + 1$

$x = -1 - \sqrt{\frac{y}{2}} = g^{-1}(y)$

$y = g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{\frac{x}{2}}$

$y = f(x) = 2(x+1)^2$

$y = 2(x+1)^2$

$\frac{y}{2} = (x+1)^2$

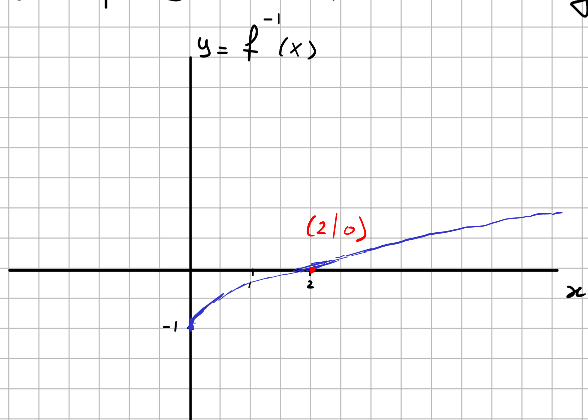
$\sqrt{\frac{y}{2}} = (x+1)$

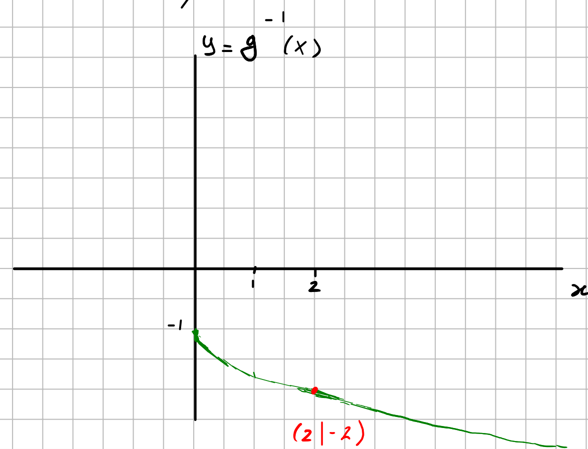
$\sqrt{\frac{y}{2}} - 1 = x$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{2}} - 1$

$y = f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - 1$

	Definitionsbereich	Wertebereich
$f(x)$	$D_f = [-1, \infty[$	$W_f = [0, \infty[$
$f^{-1}(x)$	$D_{f^{-1}} = [0, \infty[$	$W_{f^{-1}} = [-1, \infty[$
$g(x)$	$D_g =]-\infty, -1]$	$W_g = [0, \infty[$
$g^{-1}(x)$	$D_{g^{-1}} = [0, \infty[$	$W_{g^{-1}} =]-\infty, -1]$

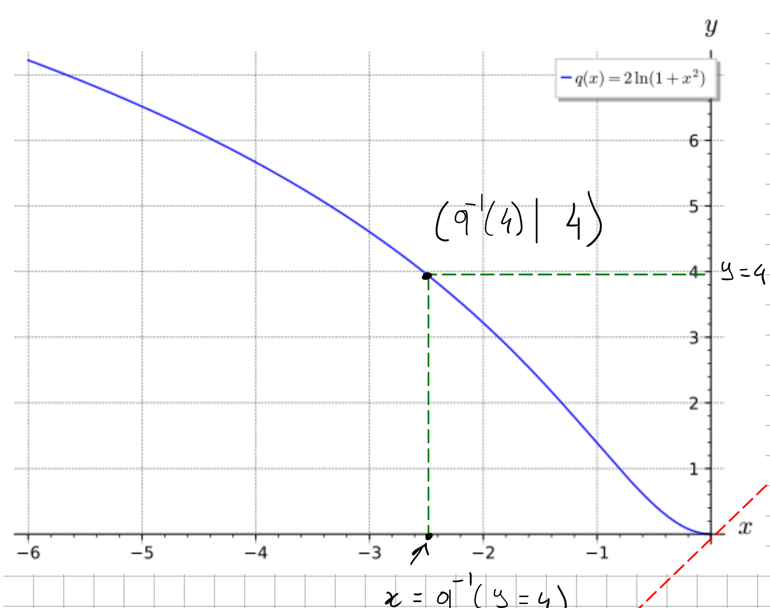




4.3 AUFGABE

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion für die folgende Funktion

- $q(x) = 2\ln(x^2+1)$; Definitionsbereich: $D_q =]-\infty, 0]$



$D_q =]-\infty, 0]$

$q(x) = 2\ln(1+x^2)$

$W_q = [0, +\infty[$

Umkehrfunktion $q^{-1}(x)$

$D_{q^{-1}} = [0, +\infty[\quad W_{q^{-1}} =]-\infty, 0]$

$y = q(x) = 2\ln(1+x^2)$

$y = 2\ln(1+x^2)$

$\frac{y}{2} = \ln(1+x^2)$

$\exp(\frac{y}{2}) = \exp(\ln(1+x^2))$

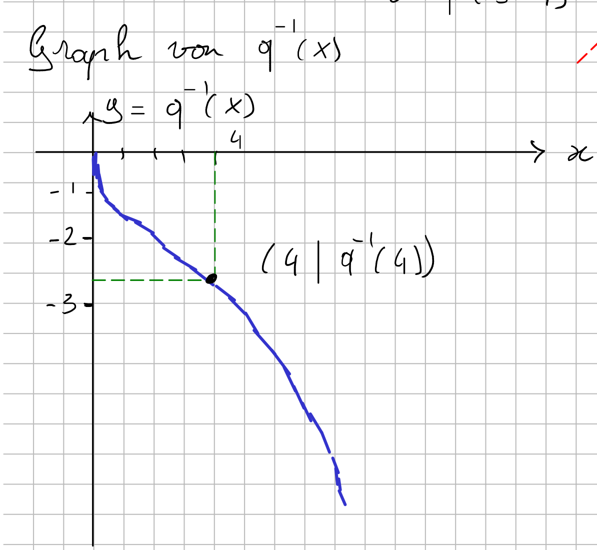
$\exp(\frac{y}{2}) = 1+x^2$

$x^2 = e^{\frac{y}{2}} - 1$

$x = \pm\sqrt{e^{\frac{y}{2}} - 1}$

Minus wählen!

$x = q^{-1}(y) = -\sqrt{e^{\frac{y}{2}} - 1}$



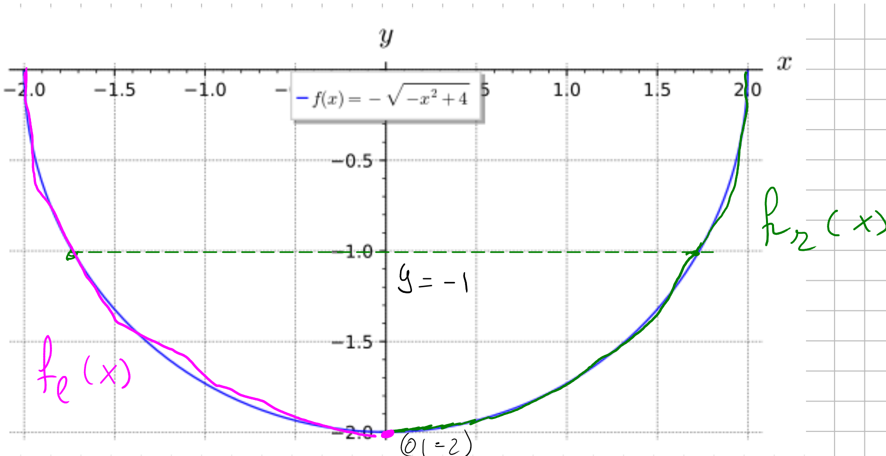
Umkehrfunktion $q^{-1}(x) = -\sqrt{e^{\frac{x}{2}} - 1}$

$D_{q^{-1}} = [0, +\infty[\quad W_{q^{-1}} =]-\infty, 0]$

4.4 AUFGABE

Bestimmen Sie Umkehrfunktion(en) für die folgende Funktion

- $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$; Definitionsbereich: $D_f = [-2, 2]$

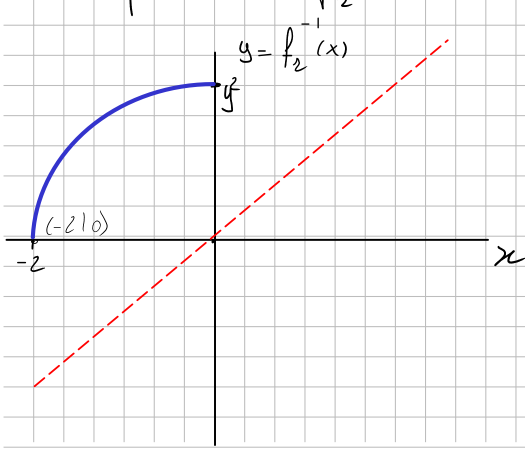


f(x) in zwe spalten:

$f_r(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $\quad D_{f_r}: [0, 2]$ $\quad W_{f_r}: [-2, 0]$

$f_l(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ $\quad D_{f_l}: [-2, 0]$ $\quad W_{f_l}: [-2, 0]$

Bestimmung der Umkehrfunktion von $f_r(x)$:



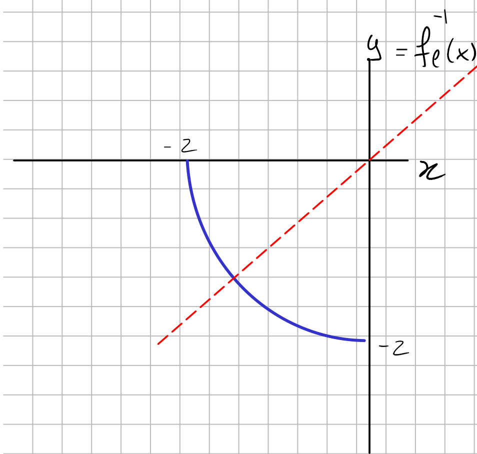
$$y = -\sqrt{4 - x^2}$$
$$-y = \sqrt{4 - x^2}$$
$$^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 = 4 - y^2$$
$$x = \pm\sqrt{4 - y^2}$$

+ wählen, da wir positive Werte für x brauchen

$$x = \sqrt{4 - y^2} = f_r^{-1}(y)$$

$$f_r^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$$ $\quad D_{f_r^{-1}}: [-2, 0]$ $\quad W_{f_r^{-1}}: [0, 2]$

Umkehrfunktion von $f_e(x)$



$$y = -\sqrt{4-x^2}$$

$$-y = \sqrt{4-x^2}$$

$$^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x = - \sqrt{4-y^2}$$

Minus wählen

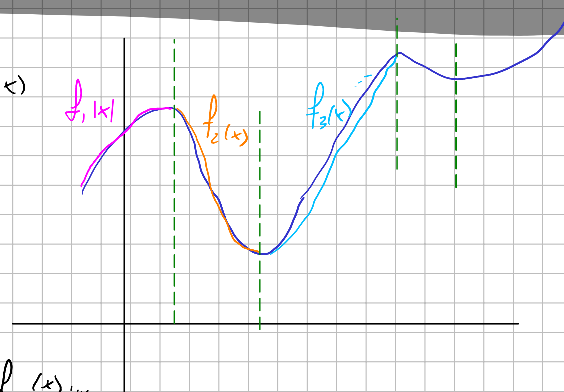
$$f_e^{-1}(y) = -\sqrt{4-y^2}$$

$$f_e^{-1}(x) = -\sqrt{4-x^2}$$

$D_{f_e^{-1}}: [-2, 0]$ $\quad$ $W_{f_e^{-1}}: [-2, 0]$

Anmerkung $f_e(x) = f_e^{-1}(x)$

Allgemeiner Fall: beliebige $f(x)$

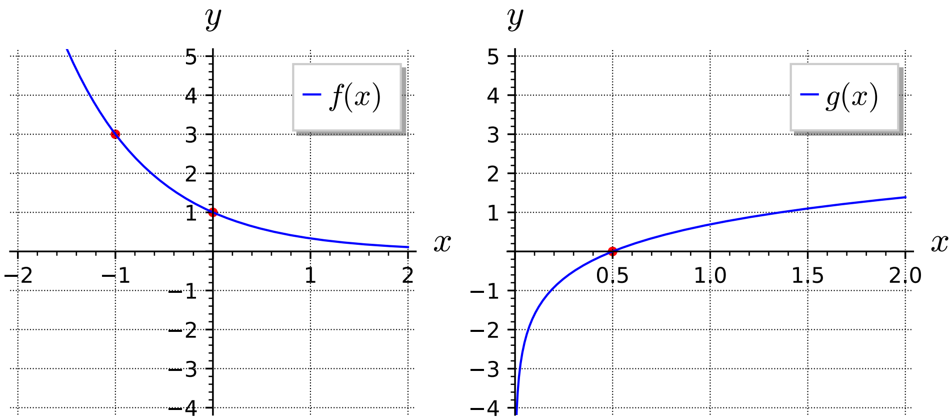


Umkehrfunktion?

Man muss die Umkehrfunktion für jede "Teilfunktion" $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$... bestimmen.

4.5 AUFGABE

Gegeben seien folgende Graphen von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b \cdot e^{ax}$ und Logarithmusfunktionen der Form $g(x) = \ln(ax)$:



- Bestimmen Sie die enstprechende Funktionsgleichungen
- Bestimmen Sie ihre Umkehrfunktionen und skizzieren Sie entsprechende Graphen

5

$f(x) = b \cdot \exp(a \cdot x)$

aus dem Bild zu erkennen:

$f(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad b \cdot \exp(a \cdot 0) = 1$

$\Rightarrow \quad b \cdot e^{0} = 1$

$\Rightarrow \quad b = 1$

$f(-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad \exp(a \cdot (-1)) = 3$

$\Rightarrow \quad e^{-a} = 3$

$\Rightarrow \quad \ln(e^{-a}) = \ln(3)$

$\Rightarrow \quad -a = \ln(3)$

$\Rightarrow \quad a = -\ln(3)$

$f(x) = 1 \cdot e^{-\ln(3) \cdot x}$

$= e^{-\ln(3) \cdot x}$

$f(x) = 3^{-x}$

$g(x) = \ln(a x)$

$g(0{,}5) = 0$

$\ln(a \cdot 0{,}5) = 0$

$\exp(\ln(a \cdot 0{,}5)) = \exp(0)$

$a \cdot 0{,}5 = 1$

$a = 2$

$g(x) = \ln(2x)$ $D_g:]0, +\infty[$ $W_g = \mathbb{R}$

$g^{-1}(x) = ? = \frac{e^x}{2}$ $D_{g^{-1}}: \mathbb{R}$ $W_{g^{-1}} =]0, +\infty[$

$y = \ln(2x)$

$\exp(y) = \exp(\ln(2x))$

$e^y = 2x$

$x = \frac{e^y}{2} = g^{-1}(y)$

$g^{-1}(x) = \frac{e^x}{2}$

Verifizierung: es soll $g(g^{-1}(x)) = x$ gelten

$g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{e^x}{2}\right)$

$= \ln\left(2\left(\frac{e^x}{2}\right)\right) = \ln\left(\cancel{2} \cdot \frac{e^x}{\cancel{2}}\right) = x$ ✓

4.6 AUFGABE

Lösen Sie die folgende Gleichungen:

1. $\ln\left(x^2 - 3\right) = 0$
2. $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

6

1.) $\ln(x^2 - 3) = 0$

exp(..) exp(...)

$x^2 - 3 = 1$

$x^2 = 4$

Lösungen:

$x = +2$ / -2

Verifizierung:

$\ln(2^2 - 3) = \ln(1) = 0$ ✓

$\ln((-2)^2 - 3) = \ln(1) = 0$ ✓

2.) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

setze vorübergehend $z = e^x$

$z^2 + z - 6 = 0$

$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = 2$ / -3

$z = 2$ oder $z = -3$

$\Rightarrow e^x = 2$ $\Rightarrow e^x = -3$! keine Lösung! weil $e^x > 0$

$\Rightarrow x = \ln(2)$

Lösung

3. $\log_2(x+3) + \log_2(x^2) = \log_2(x) + 2$

4. $\log_x(10) = 1/2$

5. $\log_{10}(x)^2 + 3\log_{10}(x) - 4 = 0$

3.

$$\log_2(x+3) + \log_2(x^2) = \log_2(x) + \log_2(4)$$

$$\log_2(x+3) + \log_2(x^2) - \log_2(x) = \log_2(4)$$

$$\log_2\left(\frac{(x+3)\cdot x^2}{x}\right) = \log_2(4)$$

Anmerkung $x \neq 0$

$$\log_2((x+3)\cdot x) = \log_2(4)$$

$$2^{\log_2((x+3)\cdot x)} = 2^{\log_2(4)}$$

$$(x+3)\cdot x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Lösungen:

$x = 1$

~~$x = -4$~~

Verifizierung:

$\log_2(1+3) + \log_2(1^2) = \log_2(1) + \log_2(4)$ ✓

$\log_2(-4+3) + \log_2(x^2) = \log_2(x) + \log_2(4)$

$\log_2(-1)$! $\quad$ $\log(-4)$!

$x = -4$ ist keine Lösung!

4.

$$\log_x(10) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 100!$$

Lösung

$$\Rightarrow x^{\log_x(10)} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 10 = x^{\frac{1}{2}}$$

Verifizierung:

$$\log_{100}(10) \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \quad ✓$$

$$100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$$

5.) Tipp

$$z = \log_{10}(x) \ldots$$

4.7 AUFGABE: LOGARITHMUSFUNKTION UND E-FUNKTION

Sei $f(x) = ae^{bx}$, für a, b reelle Zahlen. Die folgende ist eine Wertetabelle für $f(x)$:

x	$f(x)$
1	22.16716
2	163.7944
2	1210.286
4	8942.873

Bestimmen Sie a und b. (Approximierte Werte sind in diesem Beispiel notwendig.)

4