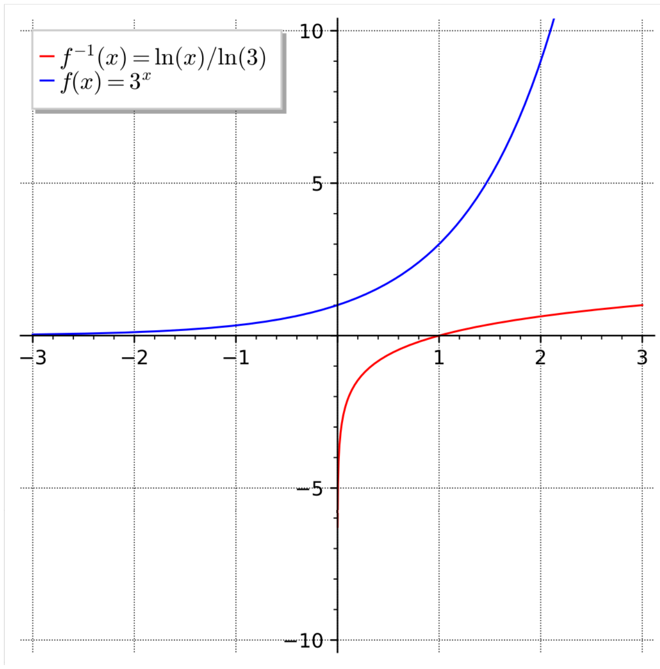
4

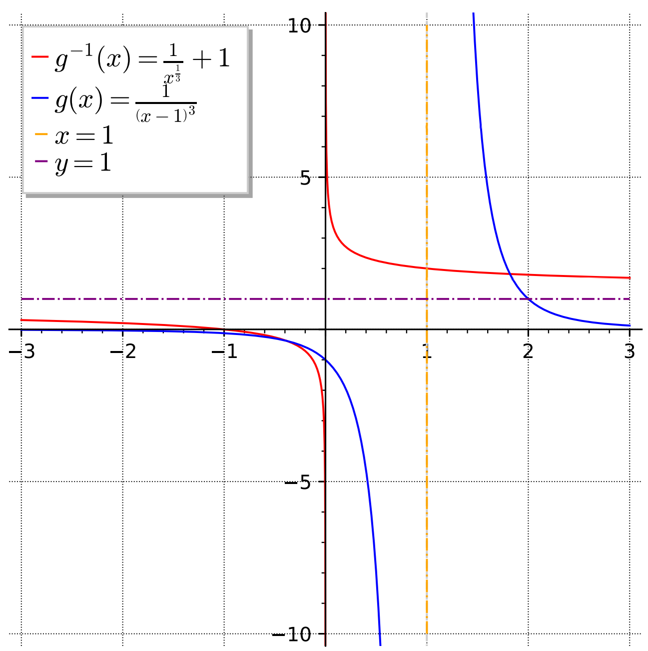
UMKEHRFUNKTIONEN, LOGARITHMUS UND E-FUNKTION

4.1 AUFGABE: UMKEHRFUNKTIONEN

Gegeben seien die folgende Funktionen mit ihren Graphen.

- Skizzieren Sie die Graphen für die entsprechende Umkehrfunktionen.
- Geben Sie die Vorschrifte der Umkherfunktionen an





$$y = f(x) = 3^x$$

$$y = 3^x$$

$$\log_3(y) = x$$

$$x = \log_3(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_3(y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_3(x)$$

Anmerkung: $\log_3(y) = \dfrac{\ln(y)}{\ln(3)}$

$$y = g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$y = \frac{1}{(x-1)^3}$$

$$(x-1)^3 = \frac{1}{y}$$

$$x - 1 = \frac{1}{y^{1/3}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{y^{1/3}}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{y^{1/3}}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x^{1/3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

4.2 AUFGABE

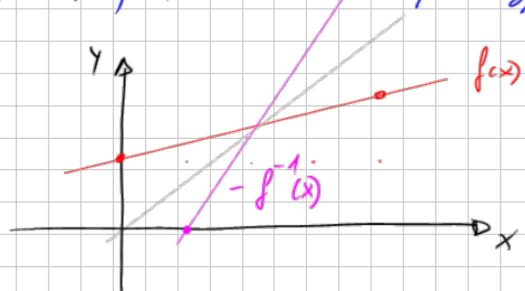
Gegeben sind folgende Funktionen:

- $f(x) = 0.25x + 1$
- $f(x) = 0.5(x-2)^2 - 1$
- $f(x) = \sqrt{(x^2+1)}$
- $f(x) = 2e^x + 1$

Bilden Sie die Umkehrfunktionen samt Definitionsbereiche und Wertebereiche und skizzieren Sie jeweils Funktion und Umkehrfunktion in einem Koordinatensystem:

- $f(x) = 0,25x + 1 = y$

$f^{-1}(x)$: $0,25y + 1 = x \Rightarrow y = \frac{x-1}{0,25} = 4x - 4$



- $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 1 = y$

$f^{-1}(x)$: $0,5(y-2)^2 - 1 = x$

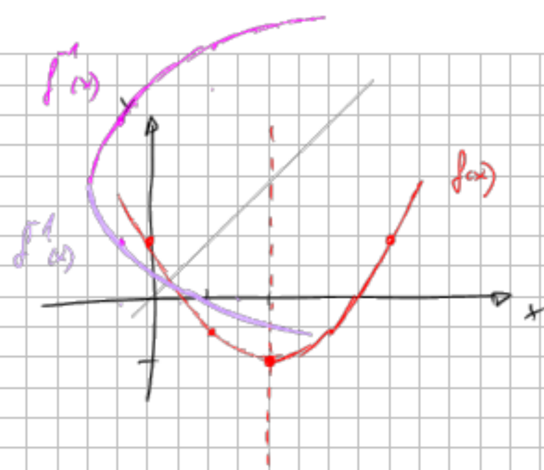
$(y-2)^2 = \frac{x+1}{0,5} = 2x+2$

$y - 2 = \pm\sqrt{2x+2}$

$y = 2 \pm \sqrt{2x+2}$ $D = [-2; \infty[$

• $2+\sqrt{2x+2}$

• $2-\sqrt{2x+2}$

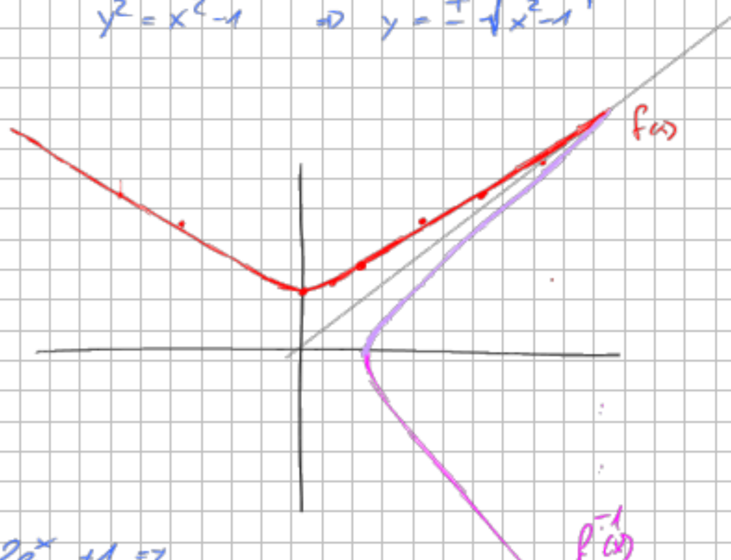


$f(x) = \sqrt{x^2+1} = y$

$f^{-1}(x) = \sqrt{y^2+1} = x$

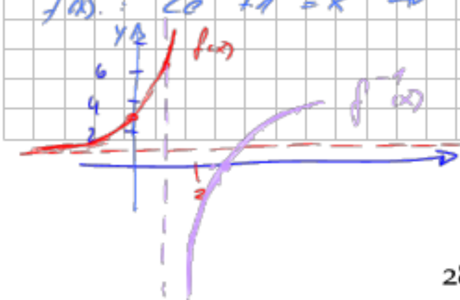
$y^2+1 = x^2$

$y^2 = x^2-1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2-1}$



• $f(x) = 2e^x+1 = y$

$f^{-1}(x)$: $2e^y+1 = x \rightarrow e^y = \frac{x-1}{2} \rightarrow y = \ln\left(\frac{x-1}{2}\right) \quad x > 1$!



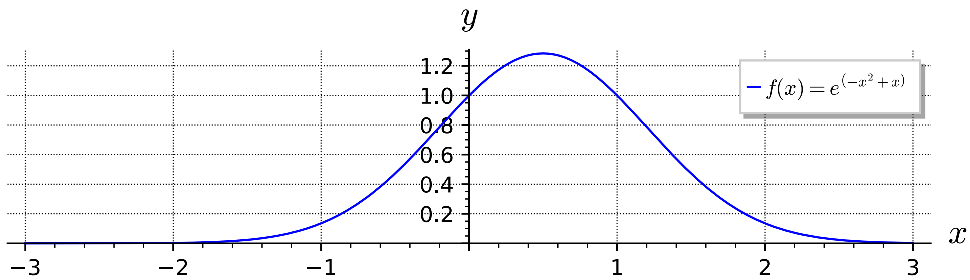
Achtung: aus Platzgründen ist hier die Skalierung auf den Achsen unterschiedlich ⇒ Spiegelung stimmt graphisch nicht.

28

4.3 AUFGABE

Bestimmen Sie Umkehrfunktion(en) für die folgende Funktion

- $f(x) = \exp\left(x - x^2\right)$; Definitionsbereich: $D_f = [-\infty, \infty]$

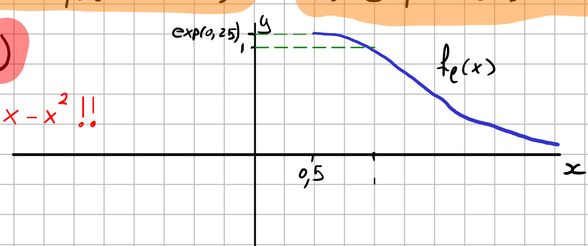


Eine einzelne Umkehrfunktion für $f(x)$ zu bestimmen, ist nicht möglich, da $f(x)$ gleiche y-Werte an unterschiedlichen x-Stellen annimmt. Wir müssen zunächst $f(x)$ in zwei "spalten":

Rechts: $f_r(x) = \exp(x - x^2)$ mit Definitionsbereich $D_{f_r} = [\frac{1}{2}, +\infty[$

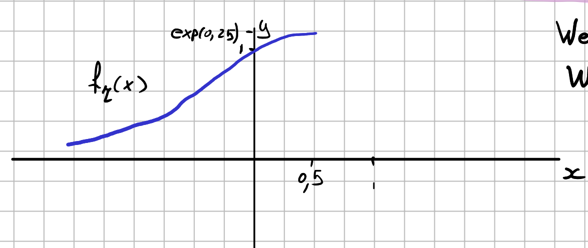
SP von $x - x^2$: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

Maximum $f(x)$ <=> Maximum $x - x^2$!!



Wertebereich: $W_{f_r} =]0, \exp(\frac{1}{4})]$

Links: $f_\ell(x) = \exp(x - x^2)$ mit Definitionsbereich $D_{f_\ell} =]-\infty, \frac{1}{2}]$



Wertebereich: $W_{f_\ell} =]0, \exp(\frac{1}{4})]$

Umkehrfunktion von $f_2(x)$

$$y = \exp(x - x^2)$$

$$\ln(y) = x - x^2$$

$$x^2 - x + \ln(y) = 0$$

+ oder - ?

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\ln(y)}}{2}$$

Wir brauchen x-Werte rechts von $x = \frac{1}{2}$, deswegen wählen wir "+"

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(y)}}{2}$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}(y) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(y)}}{2}$$

$$\Rightarrow f_2^{-1}(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\ln(x)}}{2}$$

$D_{f_2^{-1}} =]0, \exp(0{,}25)]$

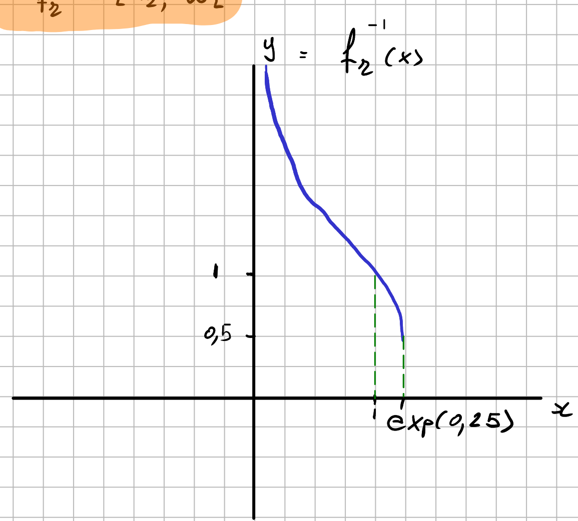
$W_{f_2^{-1}} = [\frac{1}{2}, \infty[$

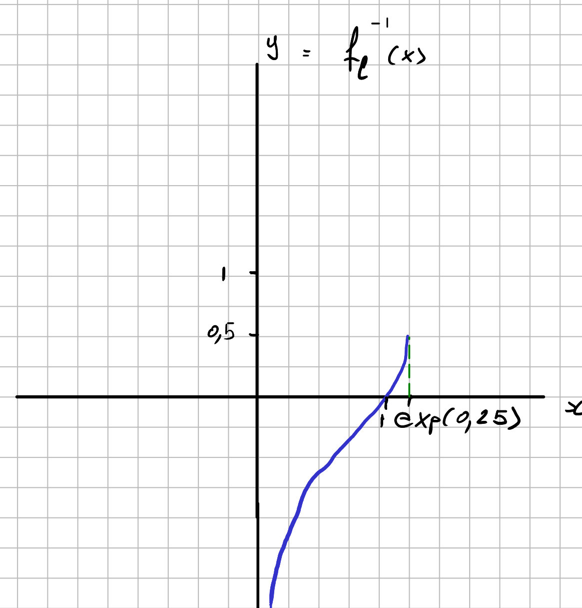
Umkehrfunktion von $f_l(x)$:

$$f_l^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\ln(x)}}{2}$$

$D_{f_l^{-1}} =]0, \exp(0{,}25)]$

$W_{f_l^{-1}} =]-\infty, \frac{1}{2}]$





4.4 AUFGABE

Lösen Sie die folgende Gleichungen:

1. $e^{3x} - 3e^{2x} - 4e^x = 0$
2. $\log_3\left(x^2 + 4x + 7\right) = 1$

1. $e^{3x} - 3e^{2x} - 4e^x = 0$. Setze $z = e^x$. Die Gleichung wird

$z^3 - 3z^2 - 4z = 0$

$z \cdot (z^2 - 3z - 4) = 0$

Lösungen für $z = 0$

und $z = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = 4$ bzw. -1

d.h. Lösungen der ursprünglichen Gleichung

für $e^x = 0$ nie erfüllt!

und

für $e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)$

$e^x = -1$ nie erfüllt!

Einzelne Lösung: $x = \ln(4)$

2. $\log_3(x^2 + 4x + 7) = 1$ $\quad 3^{\cdots}$

$3^{\log_3(x^2+4x+7)} = 3^1$

$(x^2 + 4x + 7) = 3$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

Lösung: $x = -2$

3. $\ln(x) \cdot (\ln(x)^2 - \ln(x) - 6) = 0$
4. $\exp\left(x^2 + x\right) = e^2$
5. $\exp\left(x \cdot \ln\left(x + 2\right)\right) = 1$

3. $\ln(x) \cdot (\ln(x)^2 - \ln(x) - 6) = 0$

Setze $\ln(x) = z$

$z \cdot (z^2 - z - 6) = 0$

Lösung für $z = 0$

$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

d.h. $\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$\ln(x) = 3 \Rightarrow x = e^3$

$\ln(x) = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

Lösungen: $\left\{ x = 1,\ x = e^3,\ x = \frac{1}{e^2} \right\}$

4. $\exp(x^2 + x) = e^2$

$\ln\left(\exp(x^2 + x)\right) = \ln\left(e^2\right)$

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

Lösungen:
$\{x = 1,\ x = -2\}$

5. $\exp\left(x \cdot \ln(x + 2)\right) = 1$

$\ln\left(\exp\left(x \cdot \ln(x + 2)\right)\right) = \ln(1)$

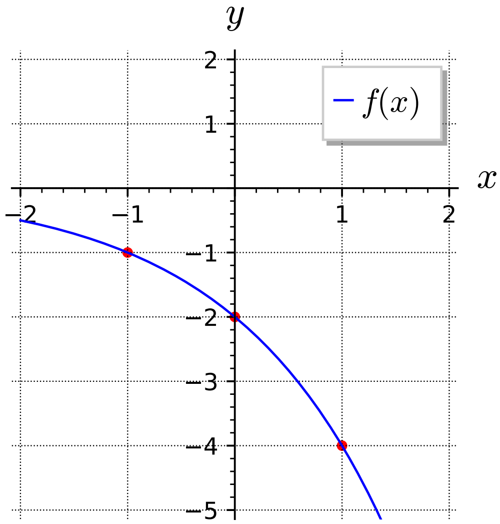
$x \cdot \ln(x + 2) = 0$

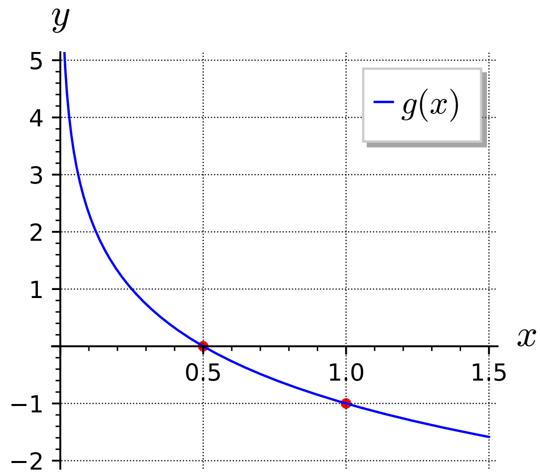
Lösungen:

$x = 0,\quad x = -1$

4.5 AUFGABE

Gegeben seien folgende Graphen von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = b \cdot e^{ax}$ und Logarithmusfunktionen der Form $g(x) = a \cdot \ln(bx)$:





- Bestimmen Sie die enstprechende Funktionsgleichungen
- Bestimmen Sie ihre Umkehrfunktionen und skizzieren Sie entsprechende Graphen

Aus dem Bild erkennen wir, dass:

$$\left.\begin{aligned} f(-1) &= -1 \\ f(0) &= -2 \\ f(1) &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Zwei aus dieser Bedingungen sind ausreichend, um a und b zu bestimmen

$f(x) = b \cdot \exp(a \cdot x)$

$f(0) = -2$

$\Rightarrow b \cdot \exp(a \cdot 0) = -2$

$\Rightarrow b = -2$

$f(-1) = -1$

$\Rightarrow -2 \cdot \exp(a \cdot (-1)) = -1$

$\Rightarrow -2\, e^{-a} = -1$

$\Rightarrow e^{-a} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow e^{a} = 2$

$\Rightarrow a = \ln(2)$

$$f(x) = -2 \cdot e^{\ln(2) \cdot x} = -2 \cdot 2^{x}$$

Aus dem Bild erkennen wir, dass

$g(0,5) = 0$

$g(1) = -1$

(a ist sicherlich $\neq 0$)

$$g(0,5) = a \cdot \ln(b \cdot 0,5) = 0$$
$$\Longrightarrow \ln(b \cdot 0,5) = 0$$
$$\Longrightarrow e^{\ln(b \cdot 0,5)} = e^0$$
$$\Longrightarrow b \cdot 0,5 = 1$$
$$\Longrightarrow b = 2$$

$$g(1) = a \ln(2 \cdot (1)) = -1$$
$$\Longrightarrow a \cdot \ln(2) = -1$$
$$\Longrightarrow a = -\frac{1}{\ln(2)}$$

$$g(x) = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \ln(2x)$$

4.6 AUFGABE: LOGARITHMUSFUNKTION UND E-FUNKTION

- Der Luftdruck in der Höhe h über der Erdoberfläche berechnet sich nach folgender Formel $p(h) = p_0 e^{-h/7.99}$. Dabei ist p_0 der Druck auf der Erdoberfläche $(h = 0)$, die Höhe h ist in $[km]$ anzugeben.

a) Berechnen Sie die prozentuale Abnahme des Luftdrucks in einer Höhe von 4800m

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-4.8/7.99} = p_0 \cdot 0{,}548$$

→ der Luftdruck hat um 45,2% abgenommen

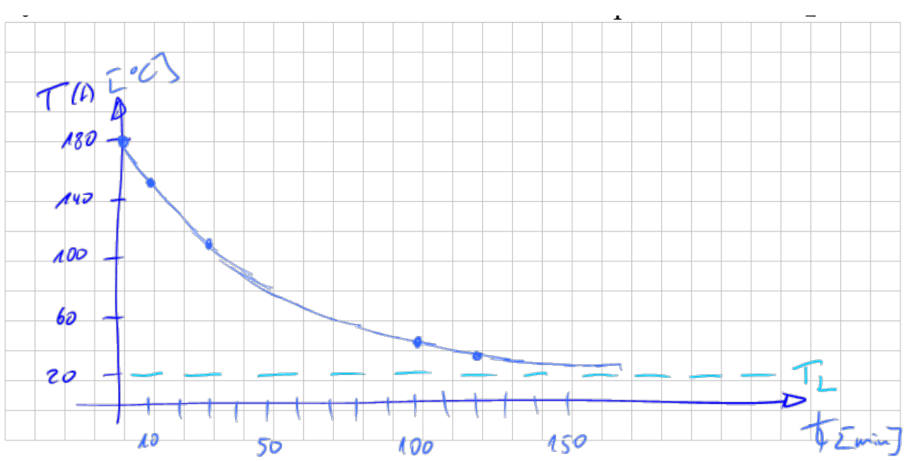
b) In welcher Höhe hat sich der Luftdruck um 40% verringert?

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-4.8/7.99} = p_0 \cdot 0{,}548$$

→ der Luftdruck hat um 45,2% abgenommen

- Wird ein Körper durch Luftkühlung gekühlt, so errechnet sich die Temperatur des Körpers wie folgt: $T(t) = (T_0 - T_L)e^{-kt} + T_L$. Dabei ist T_L die Temperatur der Luft (wird konstant angenommen) und T_0 die Körpertemperatur zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Zeit t wird in $[min]$ angegeben. k ist eine Materialkonstante (berücksichtigt Geometrie, Wärmeübergang und Wärmeleitung).

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $T(t)$ für einen Körper mit $T_0 = 180C^o$ und $k = 0.02$ und einer Lufttemperatur von $T_L = 20C^o$.



d) Welche Temperatur hat der Körper nach einer Kühldauer von 1.5 Stunden?

$$T(90\,min) = 160^\circ \cdot e^{-0{,}02 \cdot 90} + 20 = 46{,}4\,^\circ C$$

e) Wie lange muss der Körper gekühlt werden bis er eine Temperatur von 38C° erreicht hat?

$$38^\circ = 160^\circ \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} + 20^\circ$$

$$\frac{18^\circ}{160^\circ} = e^{-0{,}02 \cdot t}$$

$$\ln(0{,}1125) = -0{,}02 \cdot t \Rightarrow t = 109{,}2\ min$$