5 TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

Themen:

- Grundbegriffe *[Pa1] §III.9.1, §III.9.2, §III.9.3, §III.9.4*
- Harmonische Schwingungen *[Pa1] §III.9.5.1.1*

5.1 AUFGABE

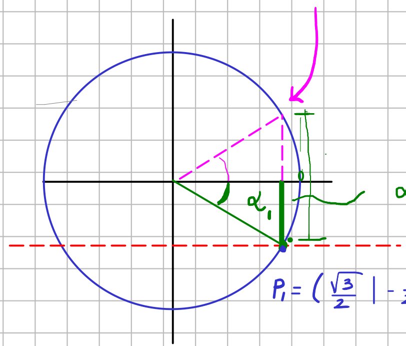
- a) Sei die Gleichung $\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$ gegeben. Bestimmen Sie den Winkel α und zeichnen Sie sie auf einem Einheitskreis (mehrere korrekte Antworten sind möglich).

Anmerkung: gleichseitiges Dreieck: $|2\alpha| = 60^\circ = \pi/3$

allgemein:

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}$



$\alpha < 0$

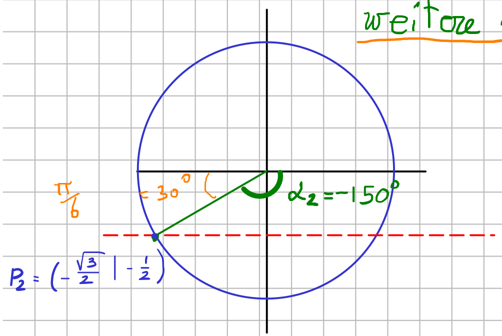
$\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}$

erste gefundene Lösung:

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = \alpha_1 = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$

$\cos(\alpha_1) = +\sqrt{1 - \sin(\alpha)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

weitere mögliche Lösung:



$\sin(\alpha_2) = -\frac{1}{2}$

$\alpha_2 = -150^\circ = -\frac{5}{6}\pi$

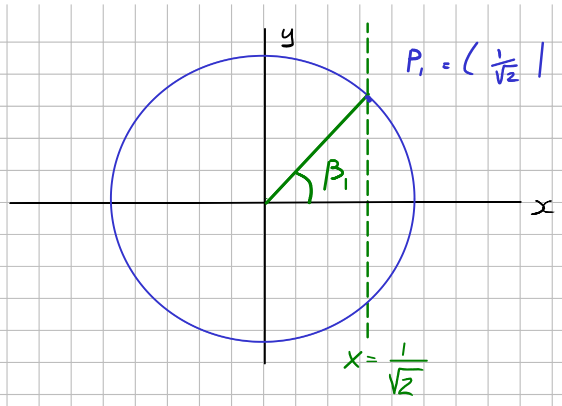
$\cos(\alpha_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Menge aller Lösungen:

$$\left\{\alpha = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

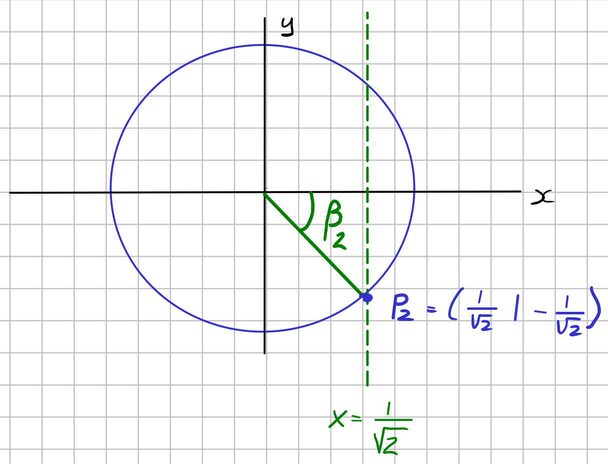
$$\left\{\alpha = -\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- b) Sei die Gleichung $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gegeben. Bestimmen Sie den Winkel β und zeichnen Sie sie auf einem Einheitskreis (mehrere korrekte Antworten sind möglich).



erste gefundene Lösung:

$\beta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$



Zweite gefundene Lösung:

$\beta_2 = -\frac{\pi}{4}$

Menge aller Lösungen:

$\left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

$\left\{ -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

5.2 AUFGABE

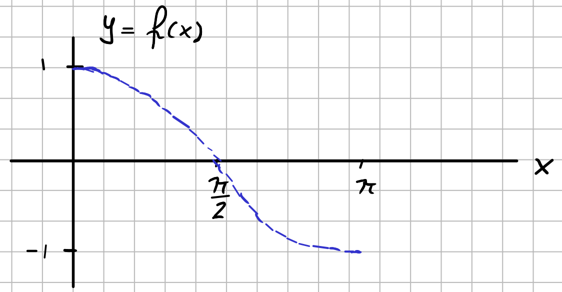
Sei $f(x) = \cos(x)$ mit Definitionsbereich $[0, \pi]$

1. Was ist der Wertebereich von $f(x)$?
2. Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
3. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$
4. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

$f(x) = \cos(x)$ $D_f = [0, \pi]$

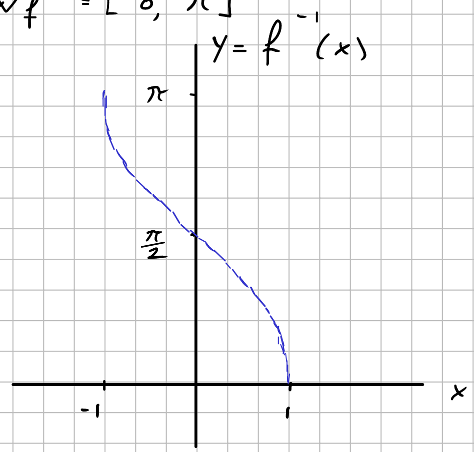
1. $W_f = [-1, 1]$

2.



3. $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$
$W_{f^{-1}} = [0, \pi]$

4.



5.3 AUFGABE

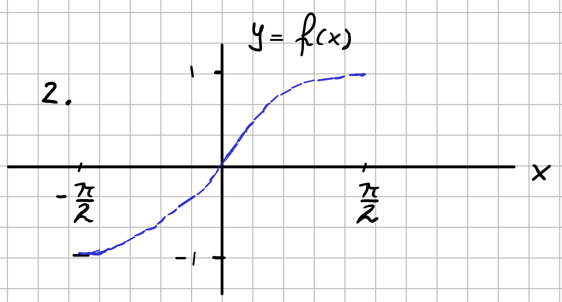
Sei $f(x) = \sin(x)$ mit Definitionsbereich $[-\pi/2, \pi/2]$

1. Was ist der Wertebereich von $f(x)$?
2. Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
3. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$
4. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

$f(x) = \sin(x)$ $\qquad D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

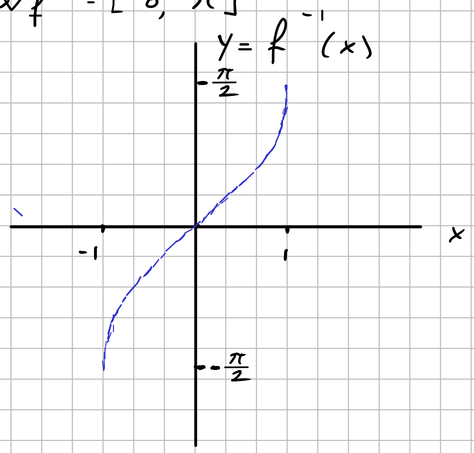
1. $W_f = [-1, 1]$

2.



3. $D_{f^{-1}} = [-1, 1]$
$W_{f^{-1}} = [0, \pi]$

4.



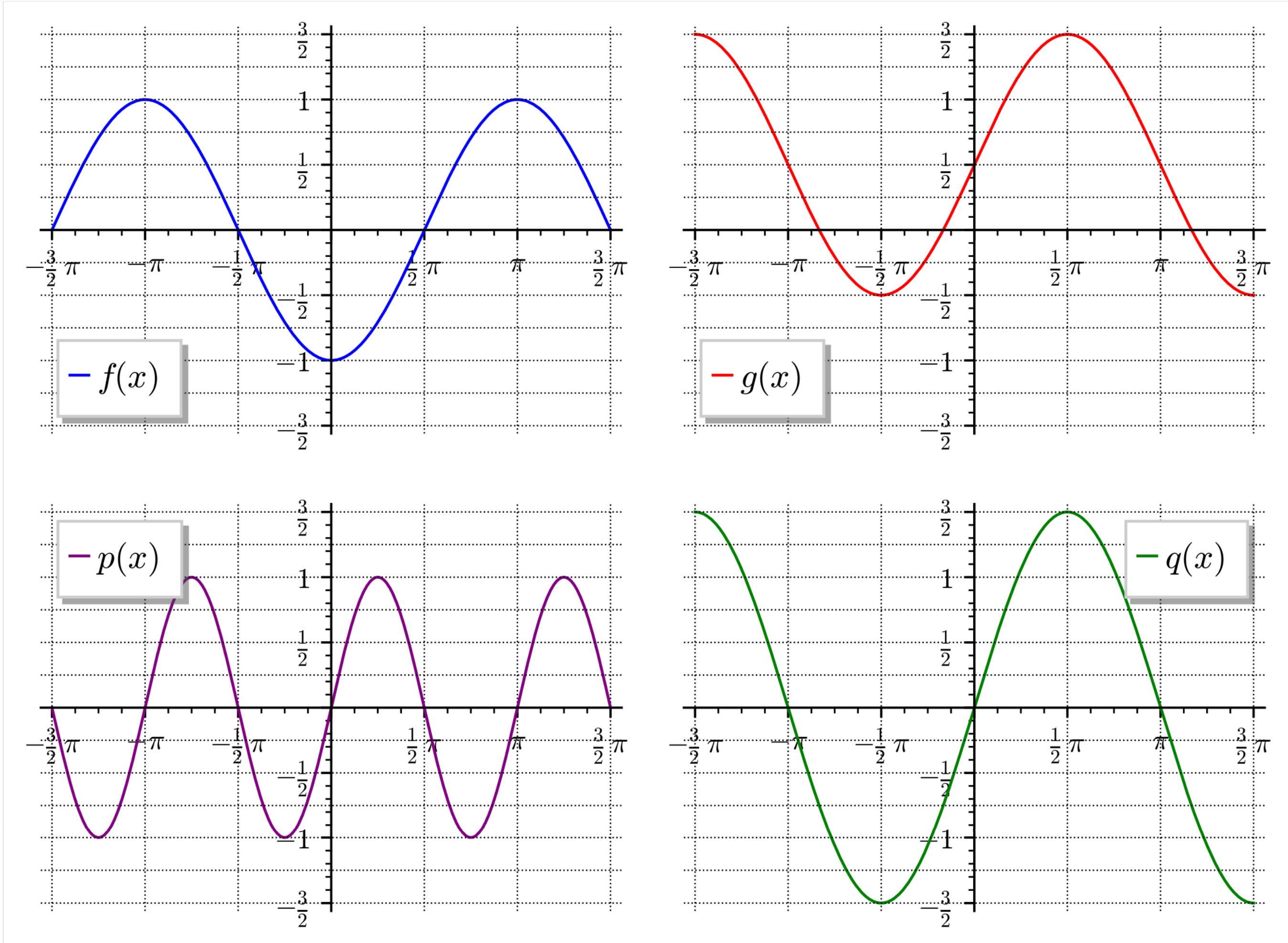
5.4 AUFGABE

Im folgenden Bild werden Graphen von vier Trigonometrischenfunktion der Form

$$A \sin(bx + c) + d$$

dargestellt.

- Geben Sie die Vorschrift der Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $q(x)$ an.



Parameter der harmonischen Schwingung – Notation aus den Videos 5.5

A amplitude

$p = \frac{2\pi}{b}$ Periodenlänge (eigentlich $p = \left|\frac{2\pi}{b}\right|$, da $b < 0$ sein kann)

d Verschiebung in y-Richtung $d > 0$ nach oben, $d < 0$ nach unten

$h = \frac{c}{b}$ Verschiebung x-Richtung $\frac{c}{b} > 0$ nach links, $\frac{c}{b} < 0$ nach rechts

•) $f(x)$ $A = 1$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $d = 0$

$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{2}$ $c = -\frac{\pi}{2}$

$f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

•) $g(x) =$ $A = 1$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $d = \frac{1}{2}$

$\frac{c}{b} = 0$ $c = 0$

$g(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$

•) $p(x)$ $A = 1$ $p = \pi \Rightarrow b = 2$

$c = 0$ $d = 0$

$p(x) = \sin(2x)$

•) $q(x)$ $A = \frac{3}{2}$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $c = 0$ $d = 0$

$q(x) = \frac{3}{2}\sin(x)$

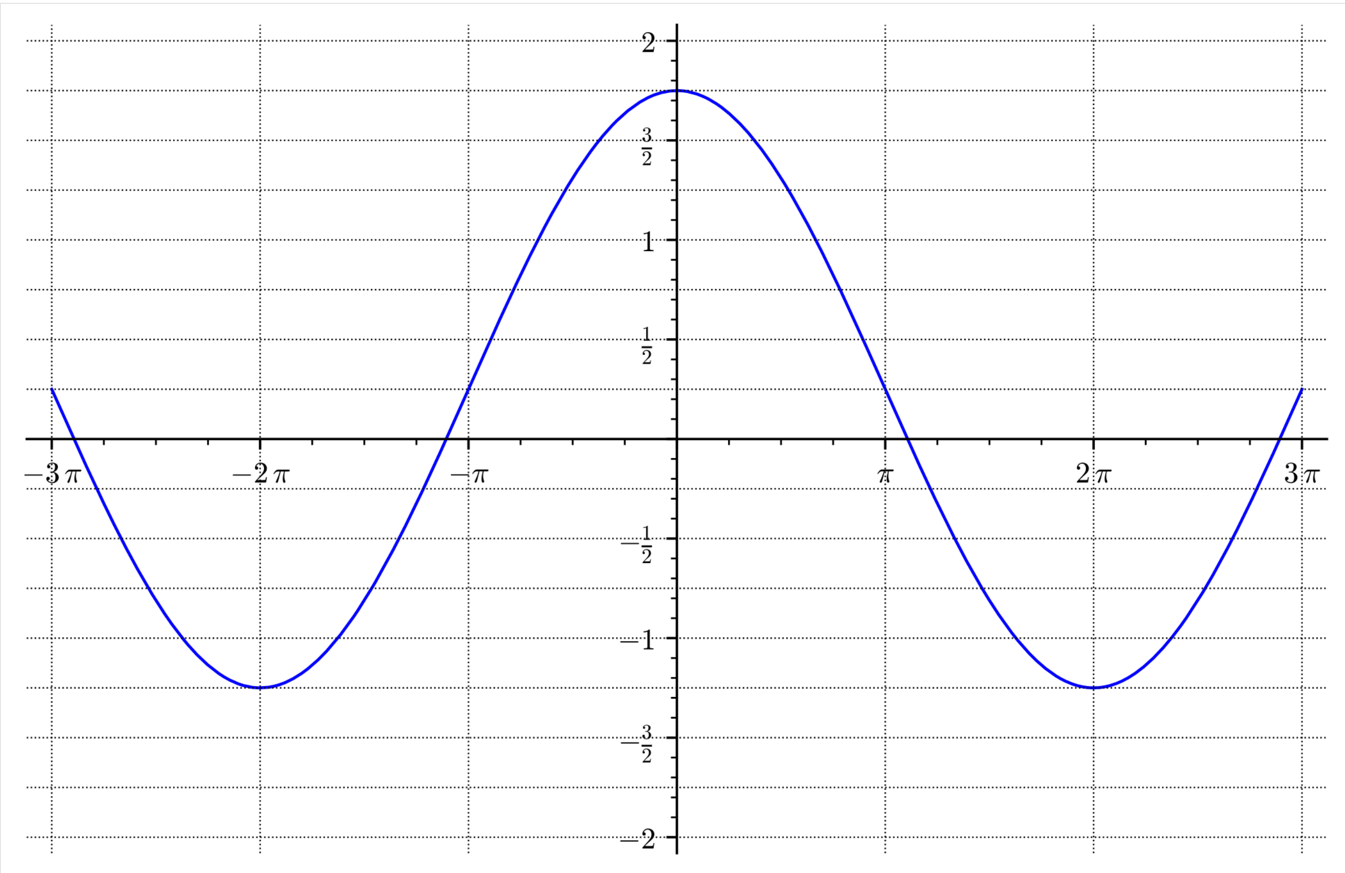
5.5 AUFGABE

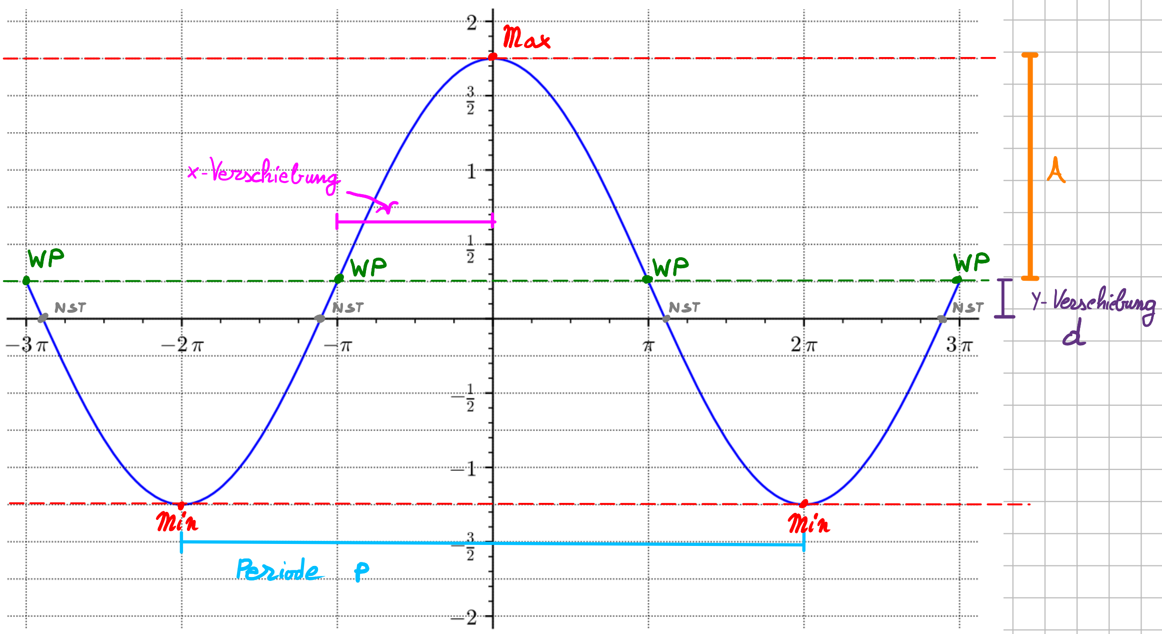
Im folgenden Bild wird den Graphen einer Trigonometrischenfunktion der Form

$$f(x) = A\sin(bx + c) + d$$

dargestellt.

- Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte.
- Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Vertikalverschiebung an.
- Geben Sie die Koordinaten von Maxima, Minima und Wendepunkte an.
- Geben Sie die Vorschrift der Funktion an.





Amplitude $A = \frac{3}{2}$

Peridenlänge $p = 4\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Y-Verschiebung $= \frac{1}{4}$ nach oben $\Rightarrow d = \frac{1}{4}$

x-Verschiebung $= \pi$ nach links $\Rightarrow \frac{c}{b} = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$

Maxima (im Bild) : $(0 \mid 1{,}75)$

Minima (im Bild) : $(-2\pi \mid -1{,}25)$, $(2\pi \mid -1{,}25)$

Wendepunkte (im Bild) : $(-3\pi \mid 0{,}25)$, $(-\pi \mid 0{,}25)$, $(\pi \mid 0{,}25)$, $(3\pi \mid 0{,}25)$

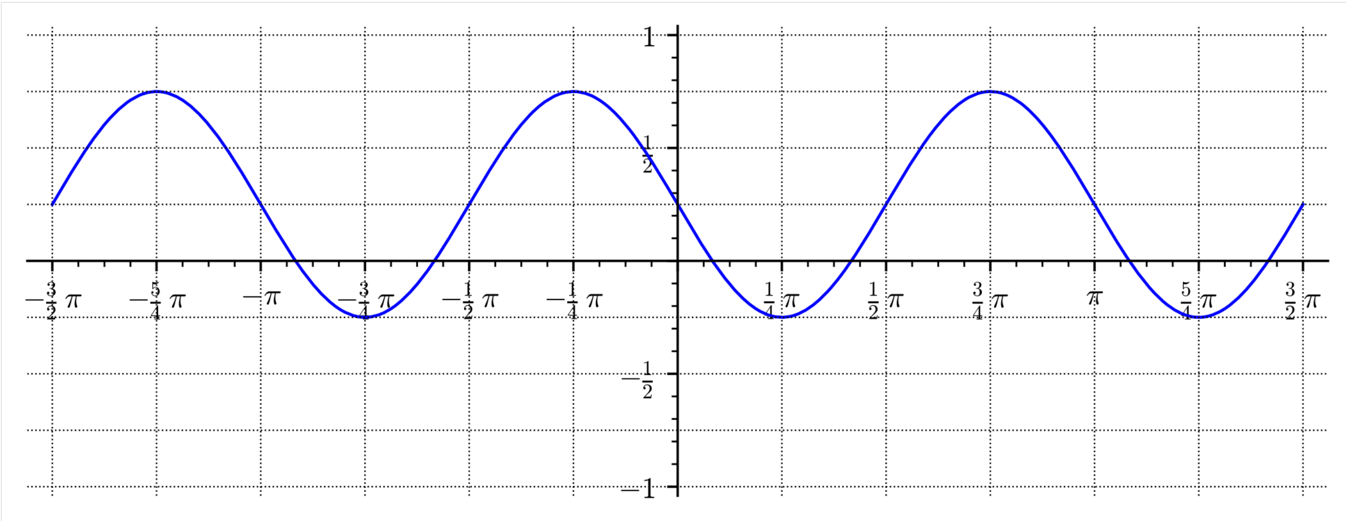
$f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}$

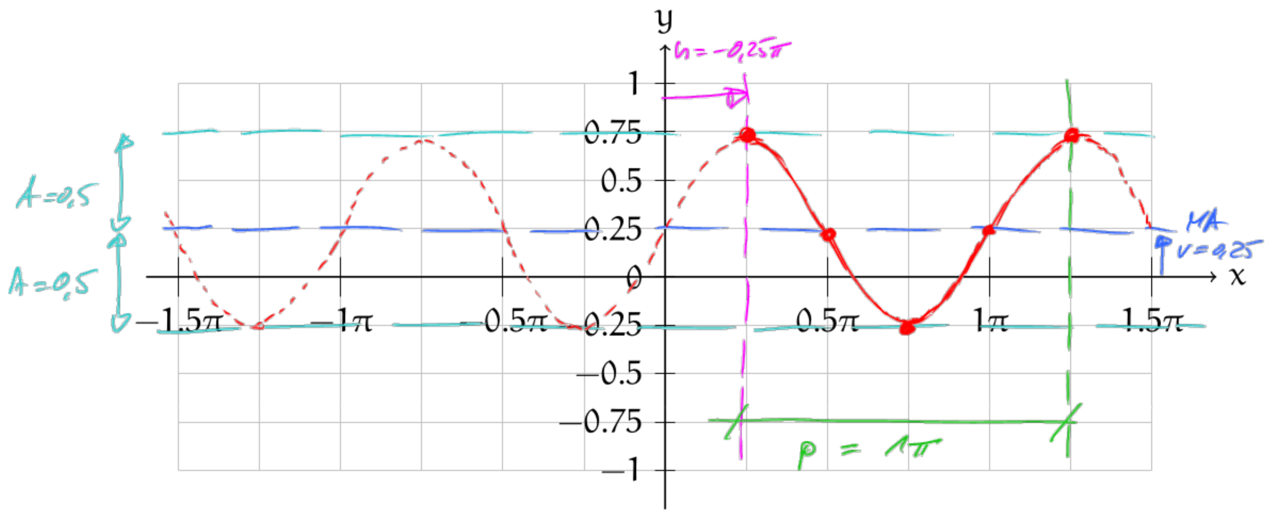
5.6 AUFGABE

Skizzieren Sie im Bereich $[-1.5\pi; 1.5\pi]$ den Graphen der Funktion

$$f(x) = 0.5 \cdot \cos(2x - 0.5\pi) + 0.25$$

Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, Phasenverschiebung, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte möglichst genau. Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Horizontal- und Vertikalverschiebung an.





vert. Verschiebung $V = 0{,}25$

Amplitude $A = 0{,}5$

horizontale Verschiebung $h = \frac{-0{,}5\pi}{2} < 0 \Rightarrow$ Versch. n. rechts

Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

5.7 AUFGABE

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = 0.5 \cdot \cos(2x - 0.5\pi) + 0.25$$

$$0{,}5 \cdot \cos(2x - 0{,}5\pi) + 0{,}25 = 0$$

$$\cos(2x - 0{,}5\pi) = \frac{-0{,}25}{0{,}5} = -0{,}5$$

$$\cos(z) = -0{,}5$$

$$z_1 = \frac{2}{3}\pi$$

$$z_2 = -\frac{2}{3}\pi$$

$$2x_1 - 0{,}5\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_1 = \frac{7}{12}\pi$$

$$2x_2 - 0{,}5\pi = -\frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = -\frac{1}{12}\pi$$

$$x_k = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi$$

$$x_m = -\frac{1}{12}\pi + m \cdot \pi$$

$$k, m \in \mathbb{Z}$$