5

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

5.1 AUFGABE

- a) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen zur Gleichung $\sin(\alpha) = -0.3$.

5.1.

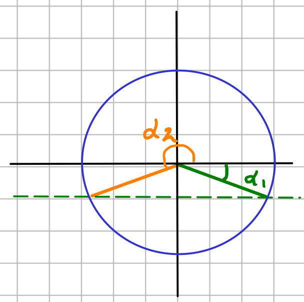
$\sin(\alpha) = -0,3$

erste gefundene Lösung

$\alpha_1 = \arcsin(-0,3) = \approx -0,3047$

zweite Lösung

$\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \pi + 0,3047 = \approx 3,4463$



Lösungsmenge

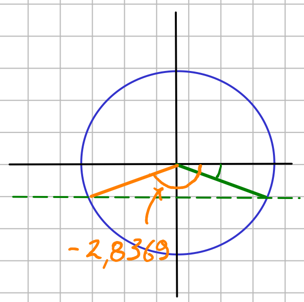
$\{-0,3047 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\{3,4463 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

Äquivalente Beschreibung:

$\{-0,3047 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\{-2,8369 + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$



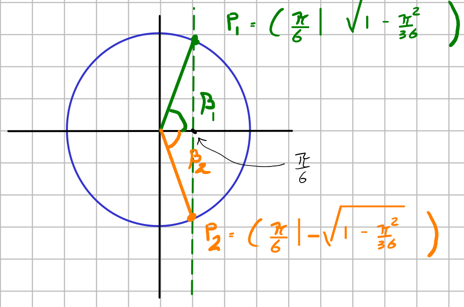
- b) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen zur Gleichung $\cos(\beta) = \frac{\pi}{6}$.

5.1

$\cos(\beta) = \frac{\pi}{6}$

$\beta_1 = \arccos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1{,}0917$

$\beta_2 = -\beta_1 = -1{,}0917$



Lösungsmenge

$\{1{,}0917 + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

$\{-1{,}0917 + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$

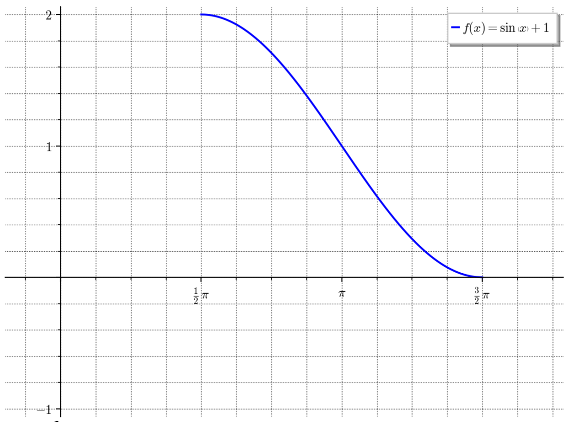
5.2 AUFGABE

Sei $f(x) = \sin(x) + 1$ mit Definitionsbereich $D_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

1. Was ist der Wertebereich von $f(x)$?
2. Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
3. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$
4. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

$f(x) = \sin(x) + 1 \qquad D_f = [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

$W_f = [0, 2]$



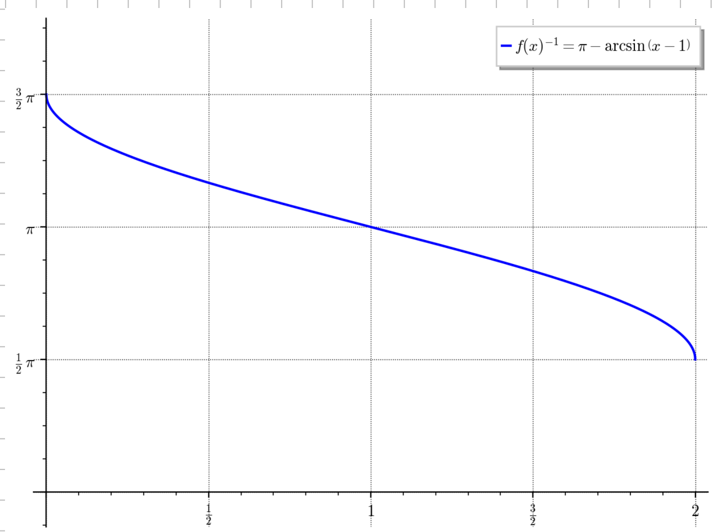
$y = \sin(x) + 1$

$y - 1 = \sin(x)$

$x \overset{?}{=} \arcsin(y-1)$ oder $x \overset{?}{=} \pi - \arcsin(y-1)$

$f^{-1}(x) = \pi - \arcsin(x-1)$

$D_{f^{-1}} = [0, 2]$



5.3 AUFGABE

Sei $f(x) = 2\cos(\pi + x) - \sqrt{3}$ mit Definitionsbereich $D_f = [0, \pi]$

- Bestimmen Sie die Nullstelle von $f(x)$
- Was sind Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie ihren Graph

$f(x) = 2\cos(x + \pi) - \sqrt{3} = 0 \qquad D_f = [0, \pi]$

$\cos(x + \pi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad W_f = [-\sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} + 2]$

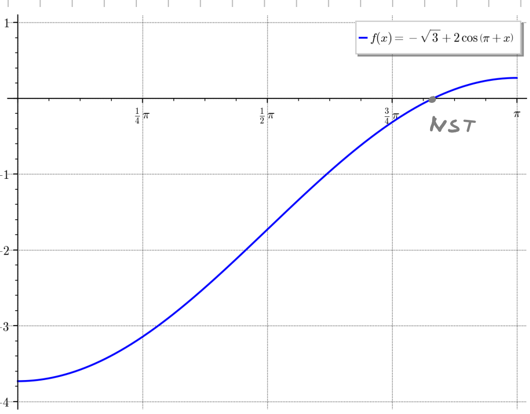
$x + \pi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = -\pi + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \end{cases}$

Welche Lösung passt uns?

Die einzige, die im Bereich $[0, \pi]$ liegt!

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi$



$D_{f^{-1}} = [-\sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} + 2] \qquad W_{f^{-1}} = [0, \pi]$

$y = f(x) = 2\cos(x + \pi) - \sqrt{3}$

$\frac{y + \sqrt{3}}{2} = \cos(x + \pi)$

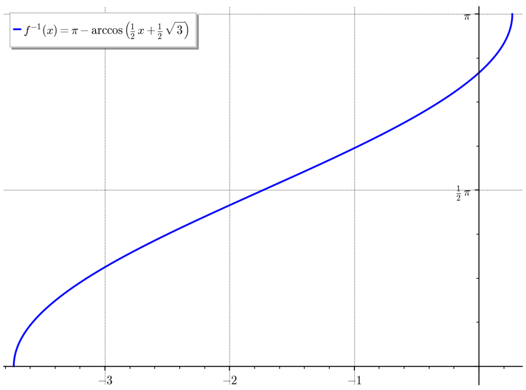
$x + \pi = \overset{?}{\pm} \left(\arccos\left(\frac{y + \sqrt{3}}{2}\right) + k \cdot 2\pi\right)$

$x = -\pi \overset{?}{\pm} \left(\arccos\left(\frac{y + \sqrt{3}}{2}\right) + k \cdot 2\pi\right)$

$x = -\pi - \left(\arccos\left(\frac{y + \sqrt{3}}{2}\right) + \underset{(k=1)}{2\pi}\right)$

die Funktion soll steigend sein, mit Werte in $[0, \pi]$

$f^{-1}(x) = -\pi + \arccos\left(\frac{x + \sqrt{3}}{2}\right)$



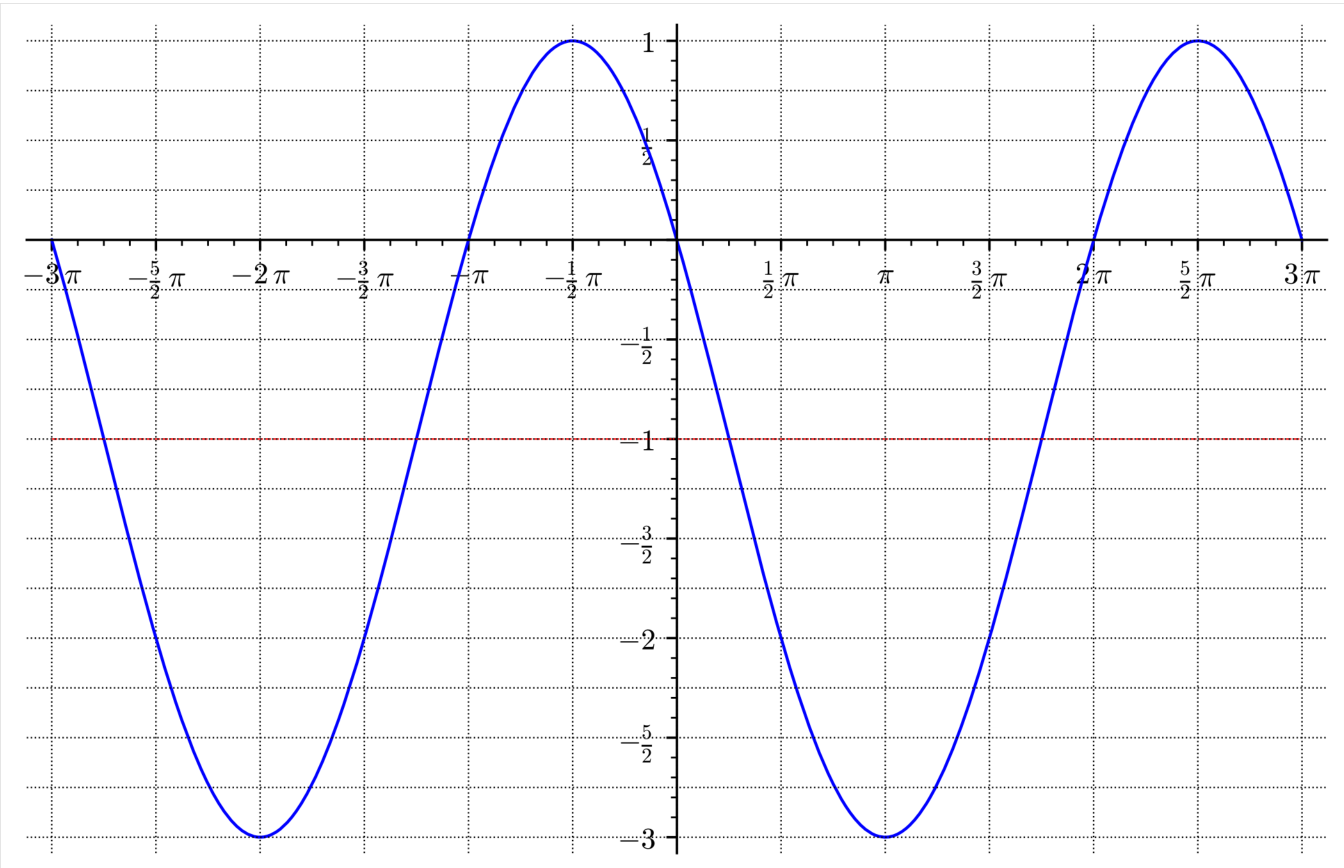
5.4 AUFGABE

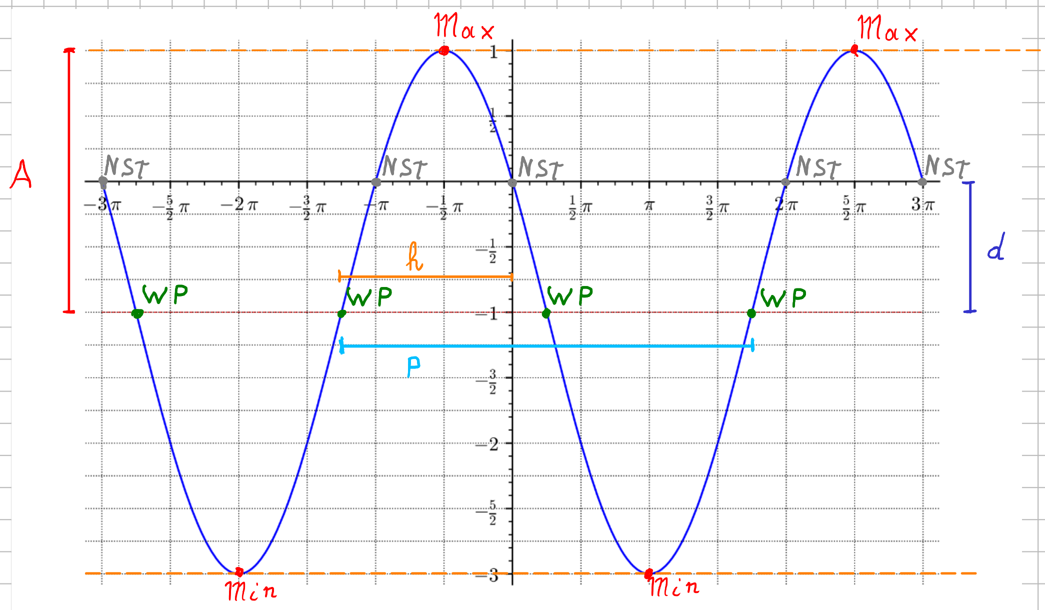
Im folgenden Bild wird den Graphen einer Trigonometrischenfunktion der Form

$$f(x) = A\sin(bx + c) + d$$

dargestellt.

- Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte.
- Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Vertikal- und Horizontalverschiebung an.
- Geben Sie die Koordinaten von Maxima, Minima und Wendepunkte an.
- Geben Sie die Vorschrift der Funktion an.





$A = 2 \qquad p = 3\pi \qquad d = -1 \qquad b = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$

$h = \frac{5}{4}\pi$ (nach links) $\qquad \frac{5}{4}\pi = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \frac{5}{6}\pi$

Maxima:

$$\left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 3\pi \;\middle|\; 1 \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Minima: $\left\{ \left(\pi + k \cdot 3\pi \;\middle|\; -3 \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Wendepunkte: $\left\{ \left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{3\pi}{2} \;\middle|\; -1 \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$f(x) = 2 \sin\left(\frac{2}{3} x + \frac{5}{6}\pi \right) - 1$

5.5 AUFGABE

Seien $f(x) = \sqrt{3}\sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$, jeweils mit Definitionsbereich $D_f = D_g = [-\pi, \pi]$.

- Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$.
- Bestimmen Sie alle Lösungen zur Gleichung $f(x) = g(x)$

Vorsicht!

$\sqrt{3}\,\sin(x) = \cos(x) \rightleftarrows 3\cdot\sin^2(x) = \cos^2(x)$

$3\cdot\sin^2(x) = 1-\sin^2(x)$

$4\cdot\sin^2(x) = 1$

$\sin(x) = \pm\frac{1}{2}$

Entspricht $\sqrt{3}\cdot\sin(x) = \pm\cos(x)$

$\left\{x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ ← Lösungsmenge.

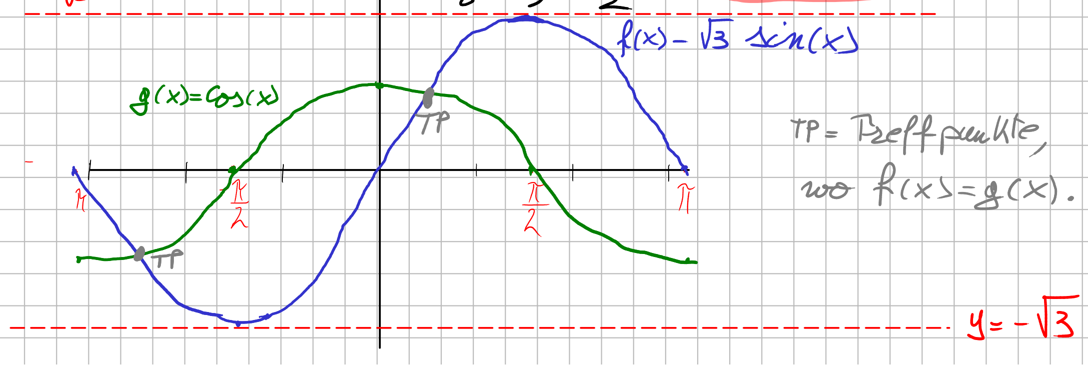
$\cancel{\left\{x = \frac{5}{6}\cdot\pi + k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

Verifizierung: $\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. OK ✓

$\sqrt{3}\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{5}{6}\cdot\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$!! Entspricht $\sqrt{3}\cdot\sin(x) = -\cos(x)$!

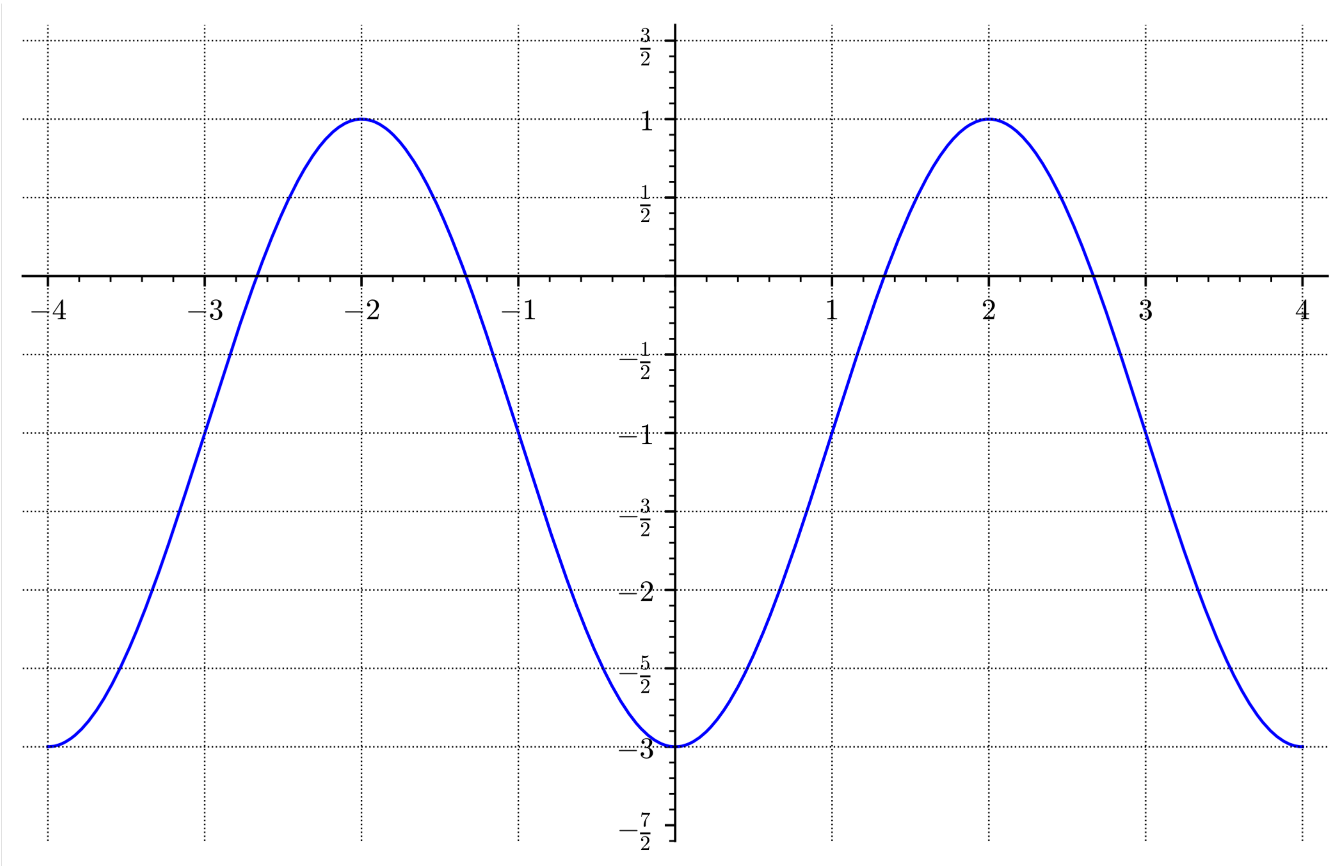


TP = Treffpunkte, wo $f(x) = g(x)$.

5.6 AUFGABE

Sei $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) - 1$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

- Ermitteln Sie Amplitude, Periodenlänge, Verschiebung in der x- und y-Richtung
- Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie Maximum- und Minimumstellen
- Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $[-4, 4]$



$A = 2$ $\quad P = 4$ $\quad 4 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2}$ $\quad h = 2$ (z.B. nach links)

$2 = \frac{c}{b} \Rightarrow c = \pi$

$d = -1$

Maxima: $\{ (2 + k \cdot 4 \mid 1),\ k \in \mathbb{Z} \}$

Minima: $\{ (k \cdot 4 \mid -3),\ k \in \mathbb{Z} \}$

Bestimmung der Nullstellen:

Setze $z = \frac{\pi}{2} x + \pi$

$2 \cos(z) - 1 = 0$

$\cos(z) = \frac{1}{2}$

$z_1 = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$ $\qquad z_2 = -\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{2} x_1 + \pi = \frac{\pi}{3}$ $\qquad \frac{\pi}{2} x_2 + \pi = -\frac{\pi}{3}$

$x_1 = -\frac{4}{3}$ $\qquad x_2 = -\frac{8}{3}$

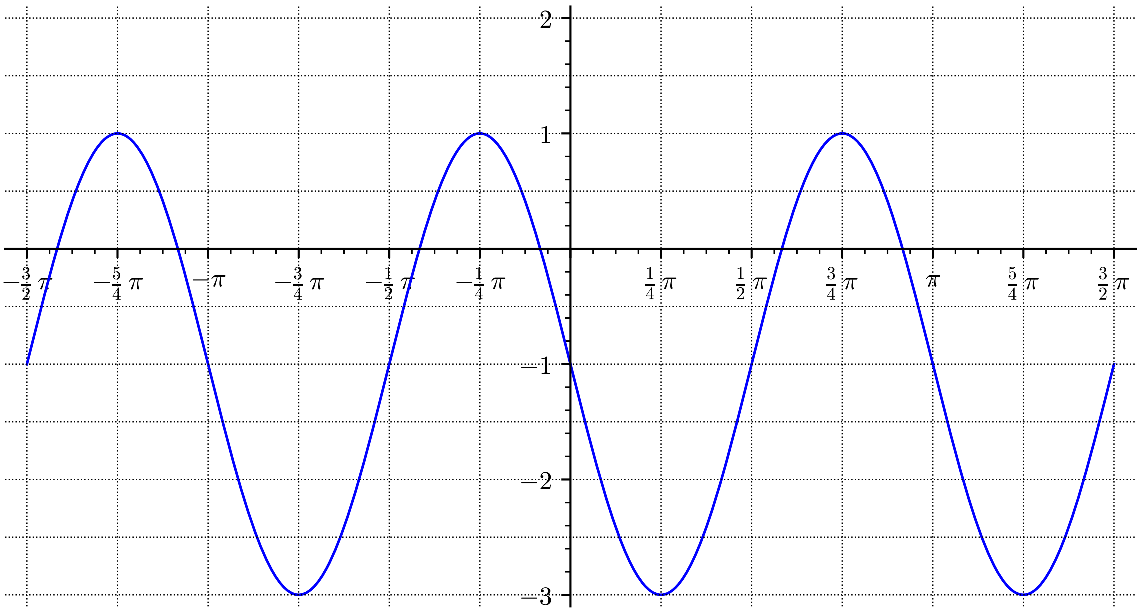
Nullstellen: $\{ -\frac{4}{3} + 4 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\frac{8}{3} + 4 \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \}$

5.7 AUFGABE:

Skizzieren Sie im Bereich [−3/2pi; 3/2pi] den Graphen der Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin(2x + \pi) - 1$$

Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, Phasenverschiebung, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte möglichst genau. Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Phasenverschiebung und Vertikalverschiebung an.



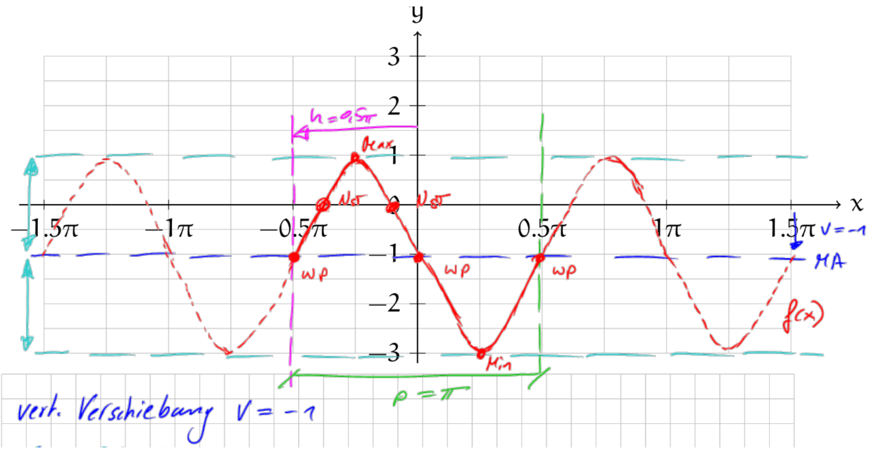
vert. Verschiebung $V = -1$ $\quad p = \pi$

Amplitude $A = 2$

horizontale Verschiebung $h = \frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow$ Versch. n. links

Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion



$$2 \cdot \sin(2x + \pi) - 1 = 0 \qquad |+1 \quad |:2$$

$$\sin(2x + \pi) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2}$$

$$z_1 = \sin^{-1}(0{,}5) = 0{,}524 = \frac{1}{6}\pi$$

$$z_2 = \pi - z_1 = \frac{5}{6}\pi$$

$$z_1 = 2x_1 + \pi = \frac{1}{6}\pi$$

$$2x_1 = -\frac{5}{6}\pi$$

$$x_1 = -\frac{5}{12}\pi$$

$$z_2 = 2x_2 + \pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$2x_2 = -\frac{1}{6}\pi$$

$$x_2 = -\frac{1}{12}\pi$$

$$\Rightarrow \quad x_k = -\frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi \qquad k, m \in \mathbb{Z}$$

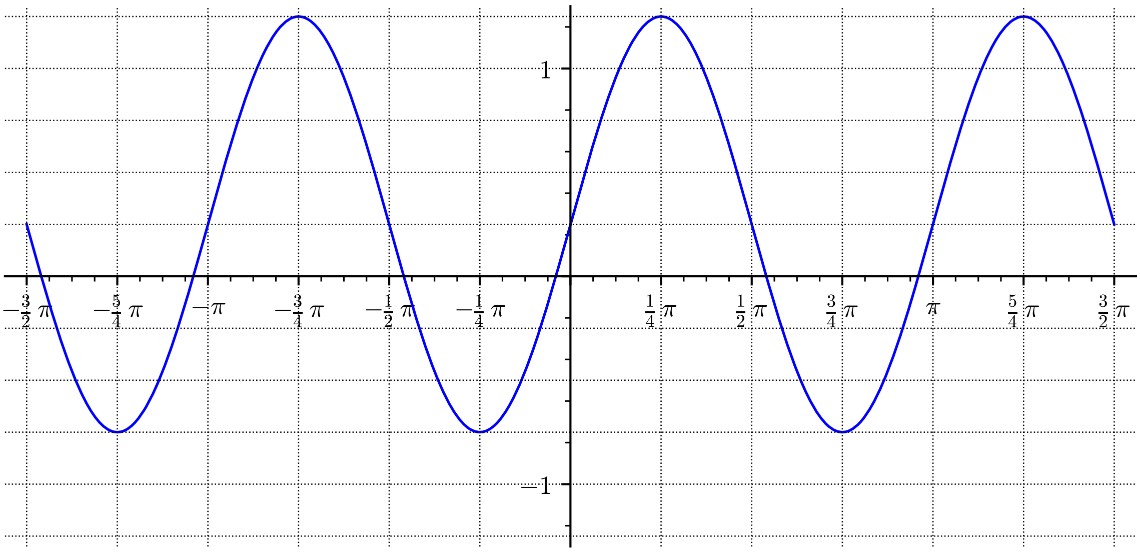
$$x_m = -\frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi$$

5.8 AUFGABE:

<u>Skizzieren</u> Sie im Bereich $[-1,5\,\pi; 1,5\,\pi]$ den Graphen der Funktion

$$f(x) = -\cos(-2x - 0,5\,\pi) + 0,25$$

Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, Phasenverschiebung, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte möglichst genau. Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Phasenverschiebung und Vertikalverschiebung an.



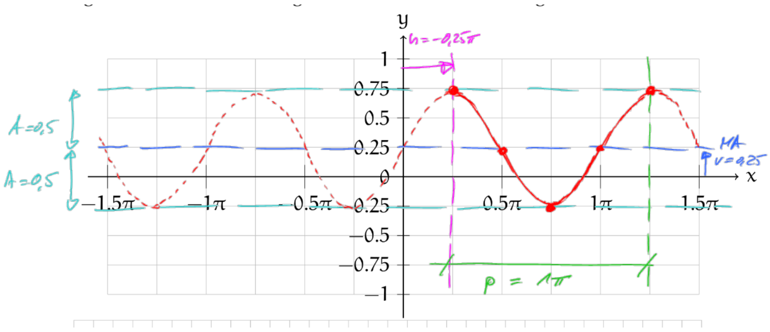
vert. Verschiebung $V = 0,25$

Amplitude $A = 0,5$

horizontale Verschiebung $h = \frac{-0,5\pi}{2} < 0 \Rightarrow$ Versch. n. rechts

Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion



$$0{,}5 \cdot \cos(2x - 0{,}5\pi) + 0{,}25 = 0$$

$$\cos(2x - 0{,}5\pi) = \frac{-0{,}25}{0{,}5} = -0{,}5$$

$$\cos(z) = -0{,}5$$

$$z_1 = \frac{2}{3}\pi$$

$$z_2 = -\frac{2}{3}\pi$$

$$2x_1 - 0{,}5\pi = \frac{2}{3}\pi$$

$$x_1 = \frac{7}{12}\pi$$

$$2x_2 - 0{,}5\pi = -\frac{2}{3}\pi$$

$$x_2 = -\frac{1}{12}\pi$$

$$x_k = \frac{7}{12}\pi + k \cdot \pi \qquad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$x_m = -\frac{1}{12}\pi + m \cdot \pi$$