5

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

5.1 AUFGABE

- a) Sei die Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gegeben. Bestimmen Sie den Winkel α und zeichnen Sie sie auf einem Einheitskreis (mehrere korrekte Antworten sind möglich).

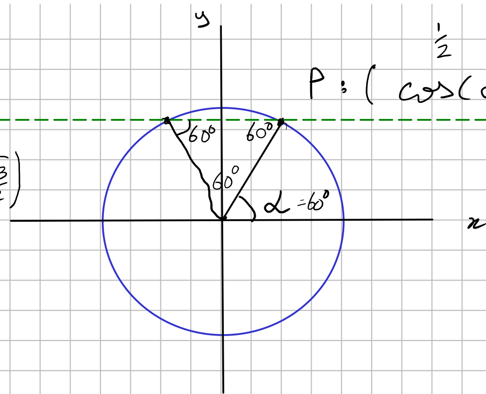
5.1

Einheitskreis

$P : (\underbrace{\cos(\alpha)}_{} \mid \sin(\alpha))$ — $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \sin(\alpha)$

$P' \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Zwei Lösungen gefunden:

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ $(= 60°)$

$\alpha = \frac{2\pi}{3}$ $(= 120°)$

Gleichung $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Unbekannte: α

Allgemeiner Fall: mit TR!

Gebraucht wird die Umkehrfunktion von $\sin(x)$ $\Rightarrow \begin{cases} \sin^{-1}(x) \\ \arcsin(x) \end{cases}$ Äquivalente Notation

$$\sin^{-1}(\sin(\alpha)) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underbrace{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\text{bekannt!}} = 1{,}0471975\ldots = \frac{\pi}{3}$$ in Bogenmaß!

$$\frac{1{,}0471975\ldots}{2\pi = 6{,}28\ldots} \cdot 360° = 60°$$ in Gradmaß

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

es folgt $\Rightarrow$ $\pi - \frac{\pi}{3}$ ebenso Lösung ist

Allgemein:

$\sin(\alpha) = a$

$\Rightarrow \sin(\pi - \alpha) = a$

Spezieller Fall

$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$

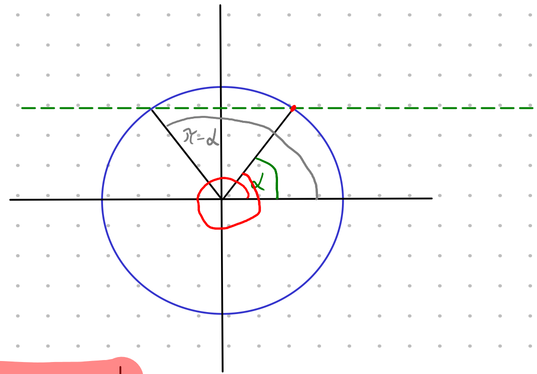
$\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ es folgt $\Rightarrow$

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$

$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$\cos(\alpha) =$ z.B. $\frac{1}{2}$

Einheitskreis



$y = a$

$\sin(\alpha) = a$

$\sin(\pi - \alpha) = a$

$\sin(2\pi + \alpha) = a$

$\sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(4\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\vdots$

und so weiter ...

Unendlich viele Lösungen!

Lösungsmenge:

Man kann beliebige ganzzahligen Vielfaches von 2π addieren

$\ldots \alpha - 4\pi, \quad \alpha - 2\pi, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \alpha + 2\pi, \quad \alpha + 4\pi, \quad \alpha + 6\pi, \ldots$

$\ldots, (\pi - \alpha) - 2\pi, \quad \pi - \alpha, \quad (\pi - \alpha) + 2\pi, \quad (\pi - \alpha) + 4\pi, \ldots$

Allgemein: man hat zwei unendliche Familien von Lösungen

erste zwei gefundene Lösungen:

$\alpha_1 = \frac{\pi}{3} \qquad \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$

Alle Lösungen: Zahlen der Form $\alpha_1 + k \cdot 2\pi$

oder

$\alpha_2 + k \cdot 2\pi$

wo k eine ganze Zahl ist

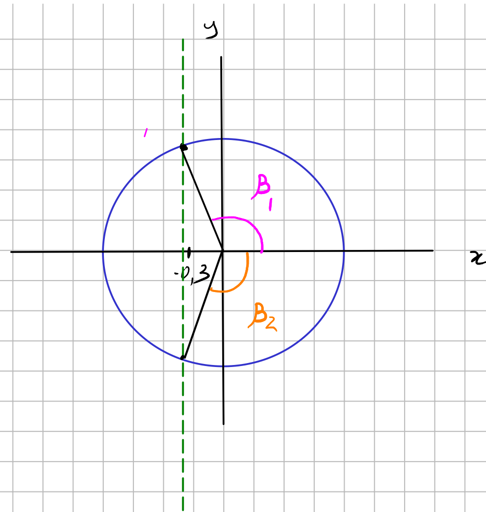
Notation:

$\{ \alpha_1 + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \}$

$\{ \alpha_2 + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \}$

- b) Sei die Gleichung $\cos(\beta) = -0,3$ gegeben. Bestimmen Sie den Winkel β und zeichnen Sie sie auf einem Einheitskreis (mehrere korrekte Antworten sind möglich).

Einheitskreis



Gleichung $\cos(\beta) = -0,3$

$\beta_1 > 0$

$\beta_2 < 0$

$\cos(\beta_1) = \cos(\beta_2)$

$\beta_1 = -\beta_2$!

$\cos(x) = \cos(-x)$

$\cos(\beta) = -0,3$ $\qquad \left(\arccos(x) = \cos^{-1}(x) \right)$

$\arccos(\cos(\beta)) = \arccos(-0,3)$

$\beta = \arccos(-0,3) = 1,8754\ldots$ Bogenmaß!

$\beta_1 = 1,8754$

$\beta_2 = -1,8754$

Lösungsmenge:

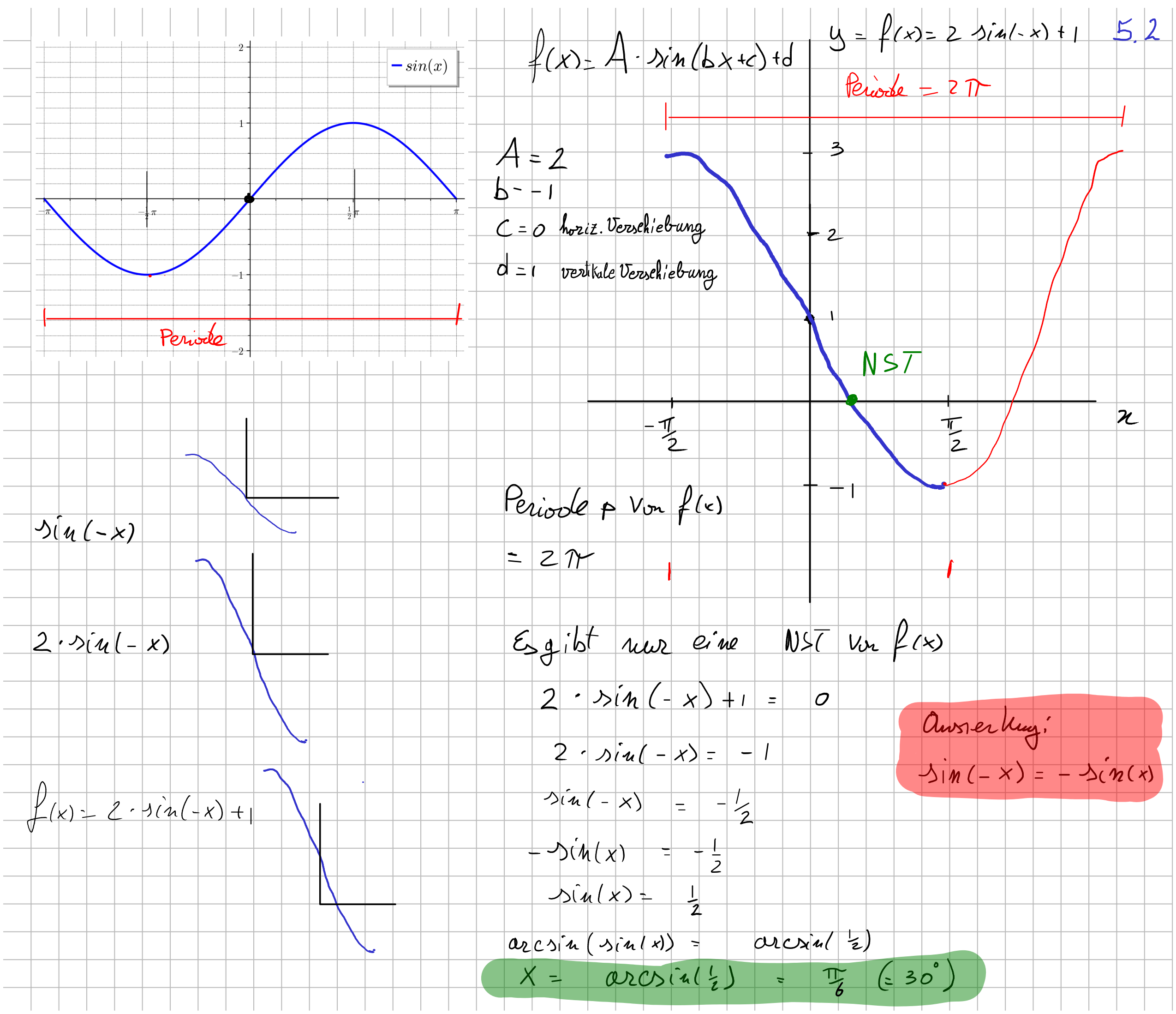
$\{ 1,8754\ldots + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$

$\{ -1,8754\ldots + k \cdot 2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$

5.2 AUFGABE

Sei $f(x) = 2\sin(-x) + 1$ mit Definitionsbereich $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- Bestimmen Sie die Nullstelle von $f(x)$
- Was sind Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$?
- Bestimmen Sie $f^{-1}(x)$ und skizzieren Sie ihren Graph



Anmerkung: Im Prinzip sollten $\frac{\pi}{6}$, $\pi - \frac{\pi}{6}$ alle mögliche Lösungen überprüft werden

$\frac{\pi}{6} + 2\pi \ \dots \quad \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi \ \dots$

wir brauchen die einzige Lösung $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$

einzige in diesem Intervall.

Überprüfung der Lösung:

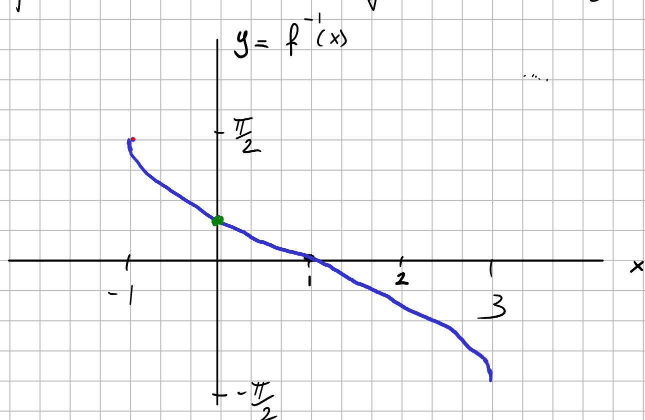
$x = \frac{\pi}{6} \qquad f\left(\frac{\pi}{6}\right) \overset{?}{=} 0$

$2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 1$

$2 \cdot (-0{,}5) + 1 = 0$ ✓

$D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad W_f = [-1, 3]$

$D_{f^{-1}} = [-1, 3] \qquad W_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



Bestimmung der Umkehrfunktion:

$y = 2\sin(-x) + 1$

$\frac{y-1}{2} = \sin(-x)$

$\sin(-x) = -\sin(x)$!

$\frac{y-1}{2} = -\sin(x)$

$\sin(x) = \frac{y-1}{2}$

$x = \arcsin\left(\frac{y-1}{2}\right)$

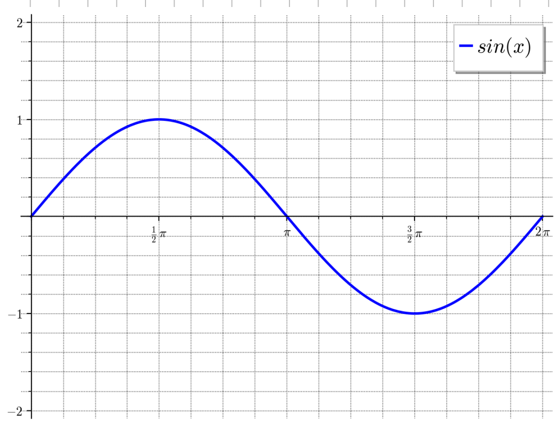
$f^{-1}(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{2}\right)$

5.3 AUFGABE

Sei $f(x) = \sin(x) + 1$ mit Definitionsbereich $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$

1. Was ist der Wertebereich von $f(x)$?
2. Zeichnen Sie den Graphen von $f(x)$
3. Ermitteln Sie Definitionsbereich und Wertebereich von $f^{-1}(x)$
4. Zeichnen Sie den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

5.3

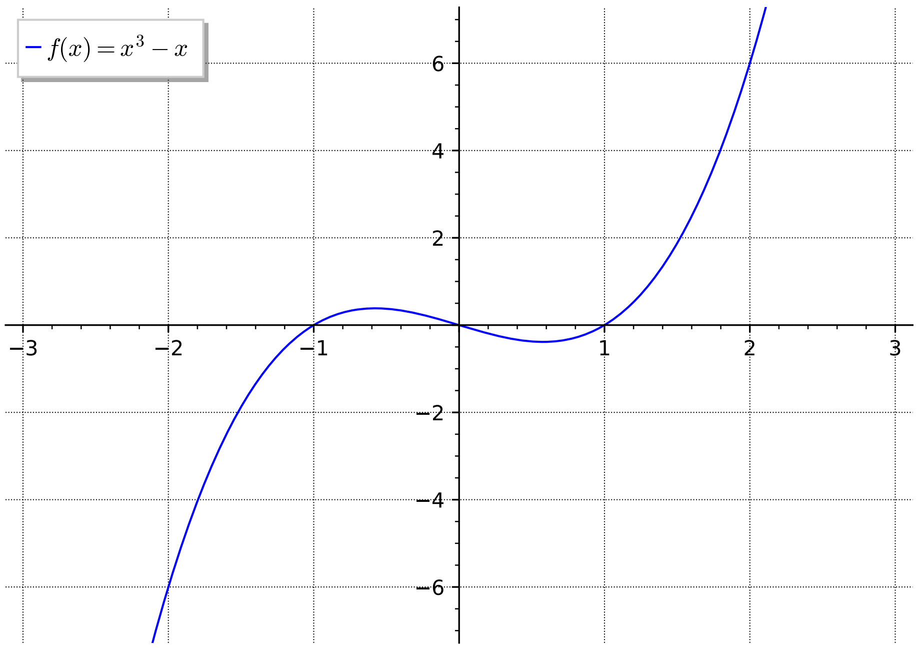


5.4 AUFGABE - VERSCHIEBUNG UND ASDEHNUNG

Im folgenden Bild wird den Graphen der Funktion

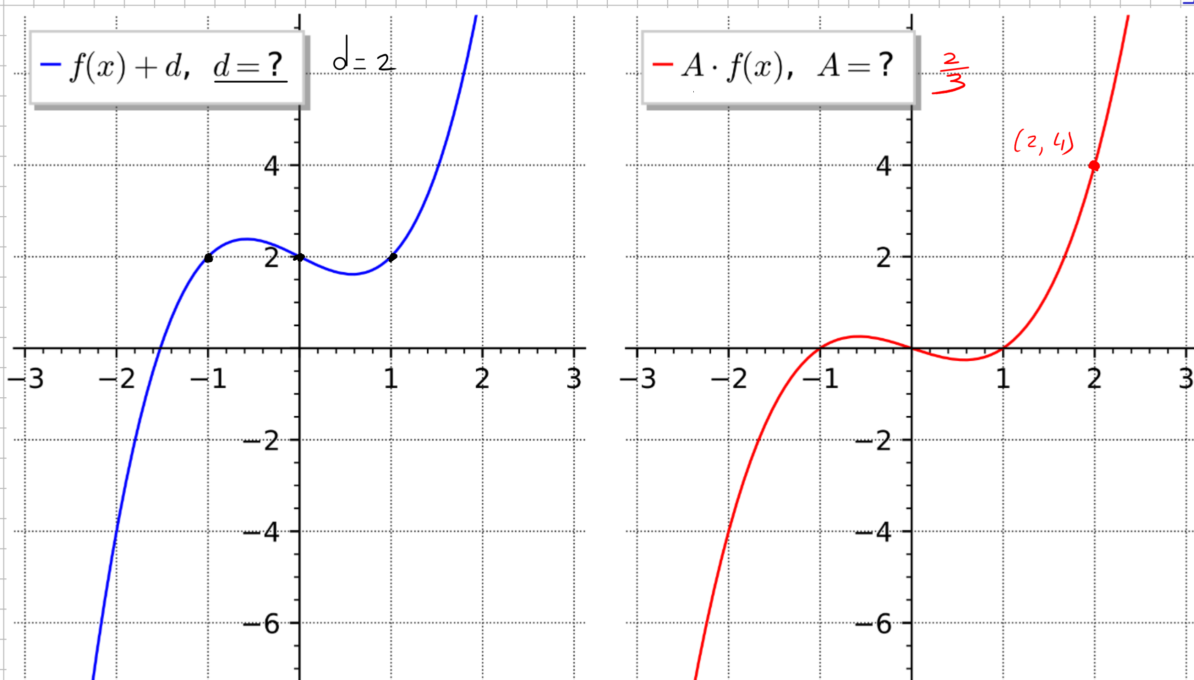
$$f(x) = x^3 - x$$

dargestellt.



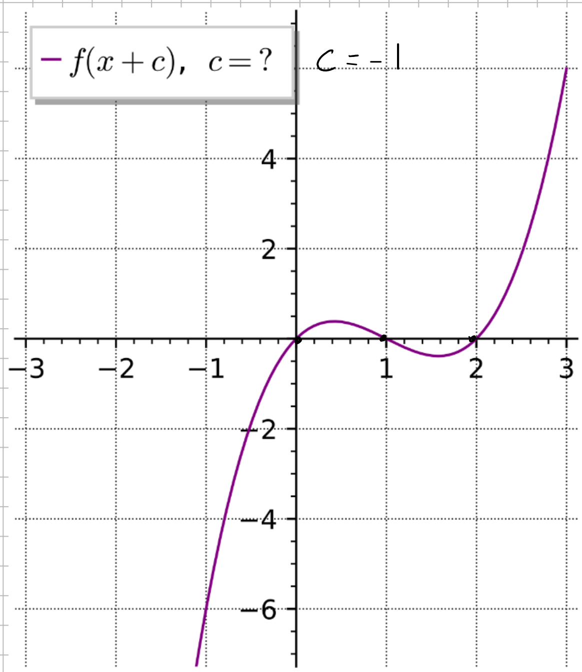
- Bestimmen Sie für die folgende Beispiele die Konstanten A, b, c, und d.

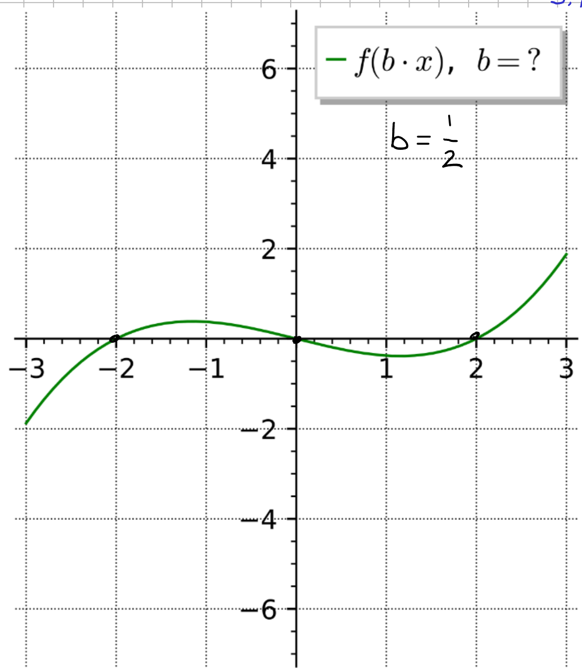
5.4a



$$A \cdot f(2) = 4$$
$$A \cdot 6 = 4$$
$$A = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

5.4b





Allgemein $\frac{c}{b} > 0$ => Verschiebung nach links!

Allgemein: .) je größer b, desto mehr geschrumpft der Graph! .) je kleiner b, desto mehr ausgedehnt der Graph!

Sind die NST wie im Bild?

Verifizierung:

$f(x-1)$

$f(\underline{0}-1) = 0$ ✓

$f(\underline{1}-1) = 0$ ✓

$f(\underline{2}-1) = 0$ ✓

Sind die NST wie im Bild?

Verifizierung:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = 0 \ ✓ \\ f\left(\frac{1}{2}\cdot(x=2)\right) = f(1) = 0 \ ✓ \\ f\left(\frac{1}{2}\cdot(x=-2)\right) = f(-1) = 0 \ ✓ \end{cases}$$

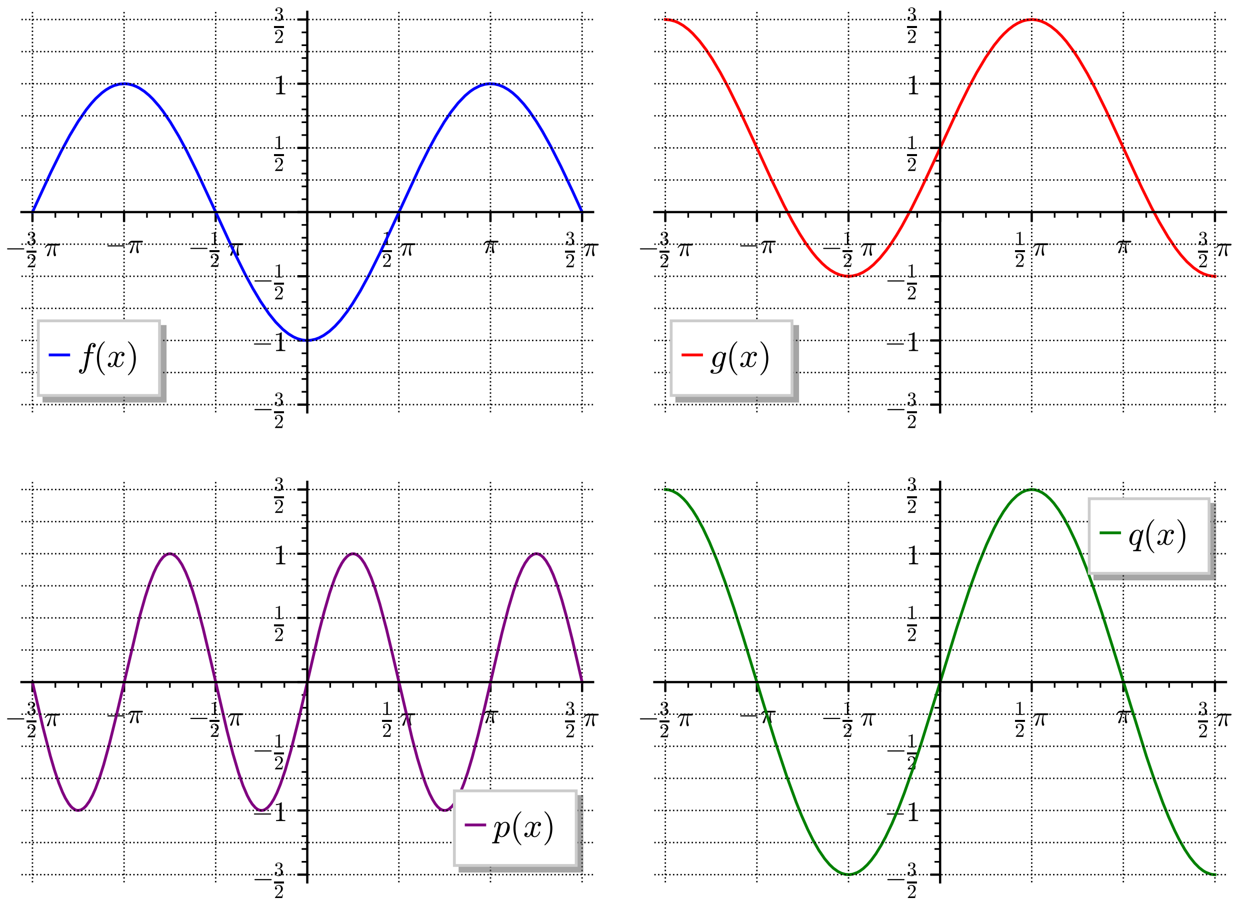
5.5 AUFGABE (AUS DEN VERSTÄNDNISFRAGEN)

Im folgenden Bild werden Graphen von vier Trigonometrischen-funktion der Form

$$A \sin(bx + c) + d$$

dargestellt.

- Geben Sie die Vorschrift der Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $p(x)$, $q(x)$ an.



Parameter der harmonischen Schwingungen - Notation aus den Videos 5.5

A amplitude

$p = \frac{2\pi}{b}$ Periodenlänge (eigentlich $p = \left|\frac{2\pi}{b}\right|$, da $b < 0$ sein kann)

d Verschiebung in y-Richtung $d > 0$ nach oben, $d < 0$ nach unten

$h = \frac{c}{b}$ Verschiebung x-Richtung $\frac{c}{b} > 0$ nach links, $\frac{c}{b} < 0$ nach rechts

•) $f(x)$ $A = 1$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $d = 0$

$\frac{c}{b} = -\frac{\pi}{2}$ $c = -\frac{\pi}{2}$

$f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

•) $g(x) =$ $A = 1$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $d = \frac{1}{2}$

$\frac{c}{b} = 0$ $c = 0$

$g(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}$

•) $p(x)$ $A = 1$ $p = \pi \Rightarrow b = 2$

$c = 0$ $d = 0$

$p(x) = \sin(2x)$

•) $q(x)$ $A = \frac{3}{2}$ $p = 2\pi \Rightarrow b = 1$ $c = 0$ $d = 0$

$q(x) = \frac{3}{2} \sin(x)$

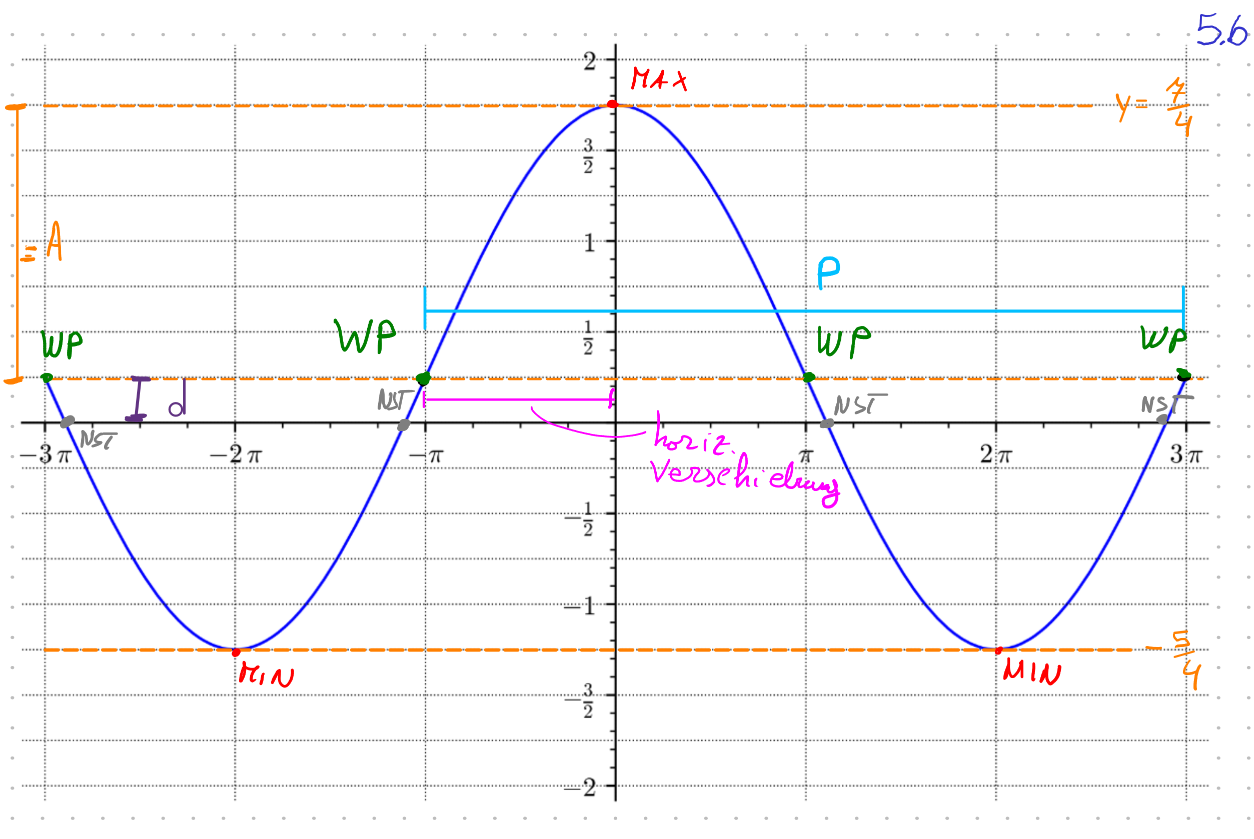
5.6 AUFGABE

Im folgenden Bild wird den Graphen einer Trigonometrischenfunktion der Form

$$f(x) = A \sin(bx + c) + d$$

dargestellt.

- Kennzeichnen Sie die Amplitude, Periodenlänge, vertikale Verschiebung, Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte.
- Geben Sie Werte der Amplitude, Periodenlänge, Vertikalverschiebung an.
- Geben Sie die Koordinaten von Maxima, Minima und Wendepunkte an.
- Geben Sie die Vorschrift der Funktion an.



Amplitude $A = \frac{3}{2}$ Periodenlänge $P = 4\pi$

Vertikale Verschiebung $d = \frac{1}{4}$

horizontale Verschiebung π nach links

$\Rightarrow \frac{c}{b} = \pi$

Max (im Bild) $(0 \mid \frac{7}{4})$

Min (im Bild) $(-2\pi \mid -\frac{5}{4})$ $(2\pi \mid -\frac{5}{4})$

Menge aller Maxima: $\left\{ \left(0 + k \cdot P \mid \frac{7}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$-\frac{1}{4}$

Menge aller Minima: $\left\{ \left(-2\pi + k \cdot P \mid -\frac{5}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Menge aller Wendepunkte:

$$\left\{ \left(-2\pi + k \cdot \frac{P}{2} \mid d = \frac{1}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$P = 4\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

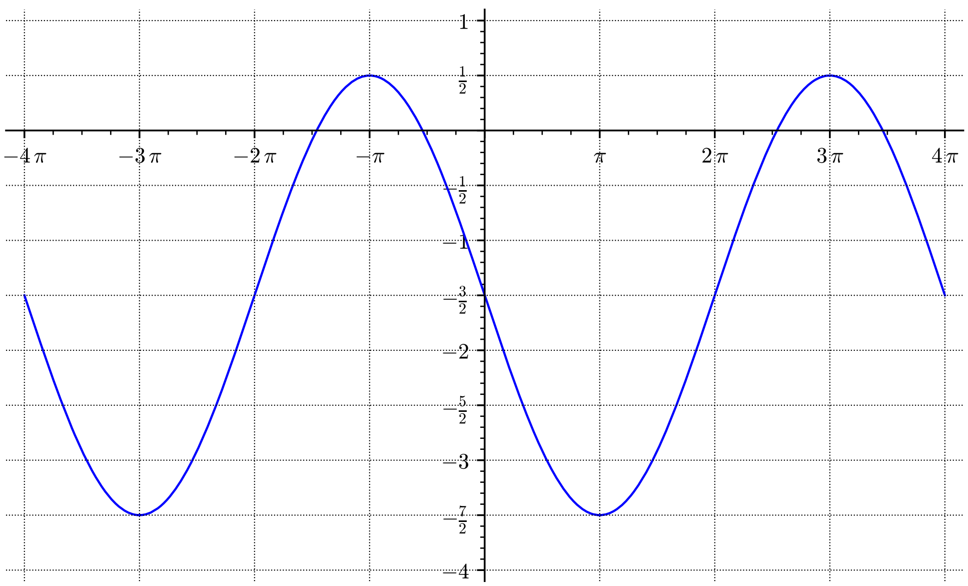
$$\frac{c}{b} = \pi \Rightarrow 2c = \pi \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

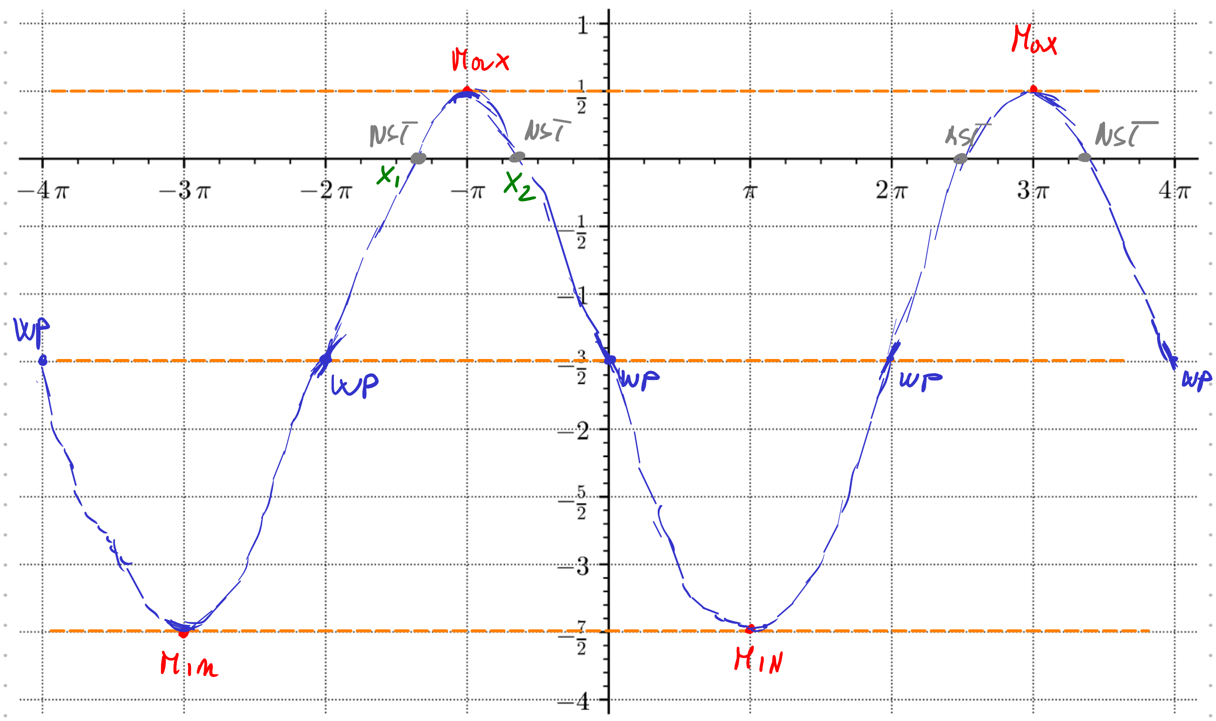
5.7 AUFGABE

Sei $f(x) = 2\sin(x/2+\pi) - \frac{3}{2}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

- Ermitteln Sie Amplitude, Periodenlänge, Verschiebung in der x- und y-Richtung
- Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie Maximum- und Minimumstellen
- Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $[-4\pi, 4\pi]$



5.7



$A = 2$ $\quad$ $b = \frac{1}{2}$ $\quad$ Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b} = 4\pi$

$d = -\frac{3}{2}$ => y-Verschiebung nach unten

$c = \pi$ => x-Verschiebung nach links von $\frac{c}{b} = 2\pi$

Maxima bei $\left\{ \left(-\pi + k\cdot 4\pi \mid \frac{1}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Minima: $\left\{ \left(\pi + k\cdot 4\pi \mid -\frac{7}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Wendepunkte: $\left\{ \left(0 + k\cdot 2\pi \mid -\frac{3}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

Bestimmung der Nullstellen:

$2\cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) - \frac{3}{2} = 0$

$2 \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \frac{3}{2}$

$\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \frac{3}{4}$ vorübergehend setze $z = \frac{x}{2} + \pi$

$\sin(z) = \frac{3}{4}$

$z_1 = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) = \approx 0{,}848062079$

$z_2 = \pi - z_1$ ebenso eine Lösung $\approx 2{,}293530575$

$z_1 = \frac{x_1}{2} + \pi = 0{,}848062079$

$\frac{x_1}{2} = 0{,}848062079 - \pi$

$x_1 = 2\cdot(0{,}848062079 - \pi) = \approx -4{,}587061149$

$z_2 = \frac{x_2}{2} + \pi = 2{,}293530575$

$\frac{x_2}{2} = 2{,}293530575 - \pi$

$x_2 = 2\cdot(2{,}293530575 - \pi) = -1{,}696124157$

gesamte Menge der Nullstellen:

$\{x_1 + k\cdot p,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x_2 + k\cdot p,\ k \in \mathbb{Z}\}$

also: $\{-4{,}587061149 + k\cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ und $\{-1{,}696124157 + k\cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

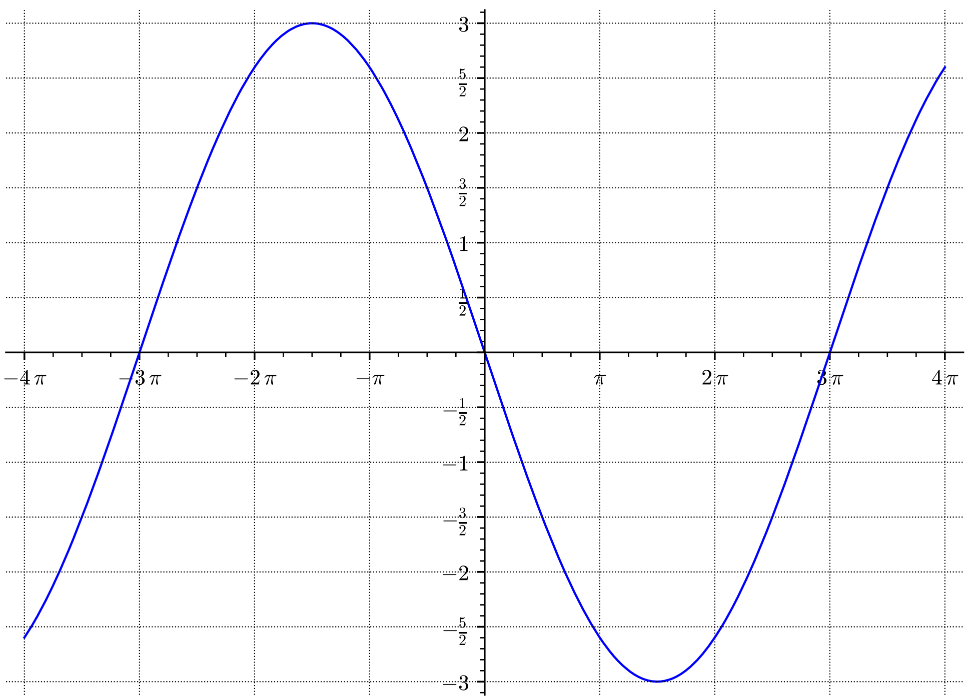
äquivalent

$\{-1{,}4601069\cdot\pi + k\cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ und $\{-0{,}5398\cdot\pi + k\cdot 4\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

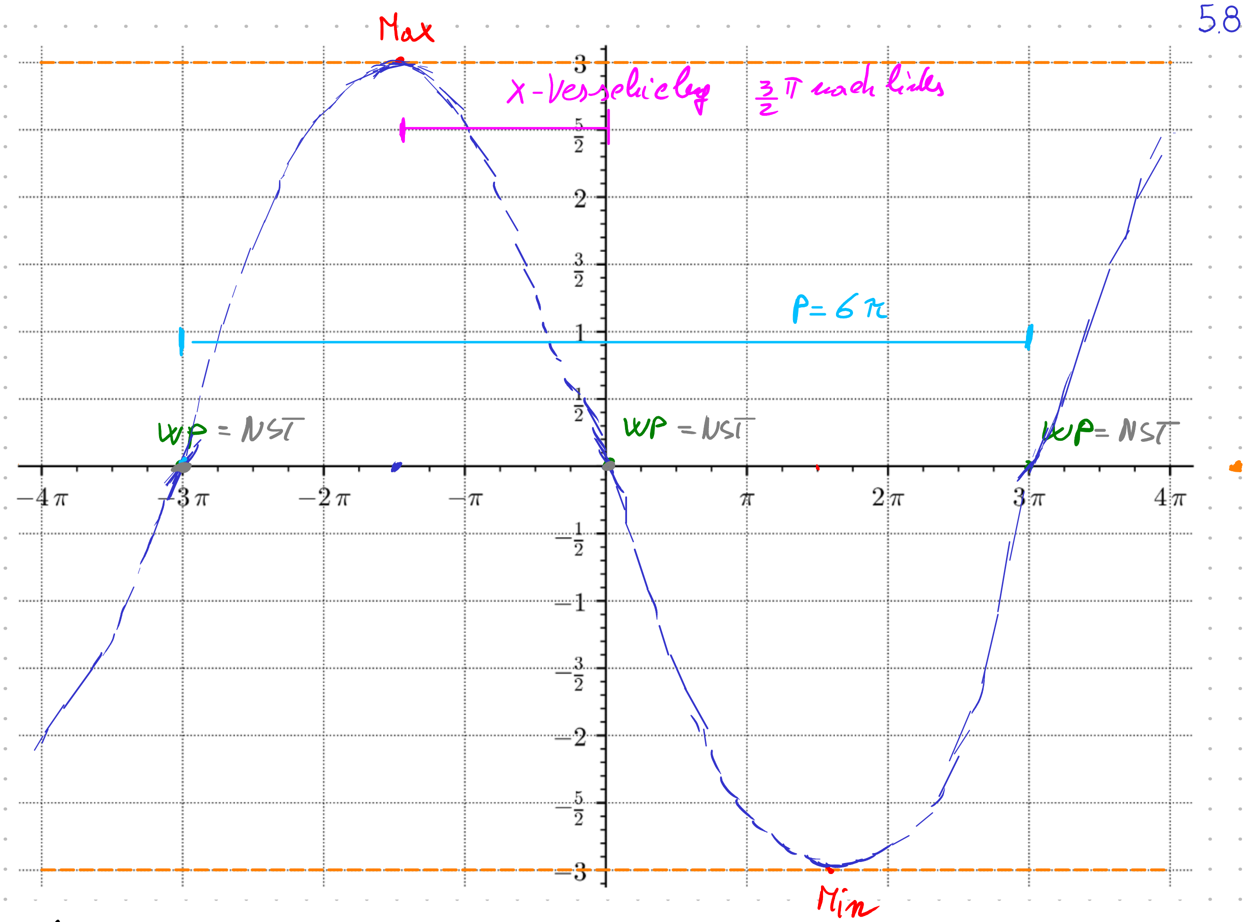
5.8 AUFGABE

Sei $f(x) = 3\cos\left(-\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\pi\right)$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

- Ermitteln Sie Amplitude, Periodenlänge, Verschiebung in der x- und y-Richtung
- Bestimmen Sie alle Nullstellen, sowie Maximum- und Minimumstellen
- Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $[-4\pi, 4\pi]$



5.8



$A = 3$ $b = -\frac{1}{3}$ $c = \frac{3}{2}\pi$

Y-Verschiebung $= d = 0$

Periodenlänge $= -\frac{2\pi}{b} = -\frac{2\pi}{(-\frac{1}{3})} = 6\pi$

X-Verschiebung $\frac{c}{b} = -\frac{9}{2}\pi$, d.h. $\frac{9}{2}\pi$ nach rechts

oder äquivalent $\frac{3}{2}\pi$ nach links!

Funktion vom Typ cos(), Max bei Anfang der Schwingung

Anfang der Schwingung bei $\frac{9}{2}\pi$, $-\frac{3}{2}\pi$, ...

Nullstellen = X-Koordinaten der WP, da $d = 0$

Nullstellen:
$\overset{\shortparallel}{\text{WP}}$ $\{ 0 + k \cdot 3\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Max $\{ (-\frac{3}{2}\pi + k \cdot 6\pi \mid 3), k \in \mathbb{Z} \}$

Min $\{ (+\frac{3}{2}\pi + k \cdot 6\pi \mid -3), k \in \mathbb{Z} \}$

Anmerkung: $\cos(-x) = \cos(x)$

$$f(x) = 3 \cdot \cos\left(-\frac{1}{3} x + \frac{3}{2}\pi \right) = 3 \cdot \cos\left(-\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\pi \right) \right)$$

$$= 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\pi \right)$$

$A = 3$		$A = 3$
$b = -\frac{1}{3}$	← gleiche Funktion →	$b = \frac{1}{3}$
$c = \frac{3}{2}\pi$		$c = -\frac{3}{2}\pi$
$d = 0$		$d = 0$